

軸対称弾性問題の応力関数による解法に関する研究

長谷川 久 夫*

A Study on the Method of Approach by means of Stress Functions for Axisymmetric Problems of Elasticity

Hisao HASEGAWA

Abstract

The principal object of this paper is to develop the method of approach by means of stress functions to axisymmetric elastic problems accompanied with both torsional deformations and body forces.

Chapter 1, under the title of "Basic equations of stress functions for axisymmetric problems of elasticity", presents a method of solution by means of three stress functions for axisymmetric dynamic problems of elasticity. The method of solution can be applied to the problems accompanied with both torsional deformations and body forces, and has the completeness of solution. As a special case of the result, it is also shown that a method of solution for static problems of elasticity, which contains well-known Love's solution, is obtained from the method mentioned above.

Chapter 2, under the title of "Stress functions for axisymmetric elastic problems with no body forces", is devoted to consider the properties of the method of solution in terms of the three stress functions shown in Chapter 1. The relations between the stress functions shown by Love and by Galerkin and one shown in Chapter 1 are considered. An attempt is made to investigate the general functional form of the static case of the three stress functions shown in Chapter 1. In Chapter 2, we also investigate the possibility of reduction of a stress function from among the three in the case of no body forces, and the relations between the well-known stress functions for torsional problems and one shown in Chapter 1.

In Chapter 3, under the title of "Stress functions for axisymmetric body force problems of elasticity", stress functions for axisymmetric body force problems are proposed. Applying the stress functions for body force problems, we deal with static problems of an elastic half space with axisymmetric body forces acting in the interior of the half space expressed in cylindrical co-ordinates. A general solution for the problems of body forces of arbitrary distributions is presented under such boundary conditions that the boundary is free from applied surface forces. The connection between the stress functions for body force problems shown in Chapter 3 and Goodier's thermoelastic potential for thermal stress problems is considered, and it is shown that the thermoelastic potential is included in a special case of the stress functions for body force problems. Stress functions for initial value problems of elastodynamics are also investigated in Chapter 3.

It may be said that a purpose of considerations of solutions of body force problems is not to analyze body force problems but to apply the solutions to usual boundary value problems. Examples of applications of the solutions to body force problems are shown in Chapters 5 and 6. As a simple example of applying the general solution to body force problems of an elastic half space mentioned above, the solution for the problem of a torsional force acting on the circumference of a circle (Green's functions for torsional body

* 広島電機大学 (広島市瀬野川町中野595)

1979. 6. 19 受理

force problems of an elastic half space) is given in Chapter 3.

Chapter 4, under the title of "An investigation on axisymmetric concentrated load problems of elasticity", is an investigation on the fundamental properties of solutions with singularities in elastostatics in order to consider their meaning as a concentrated load and the possibility of applying them to practical boundary value problems, using the stress functions with singularities. For this purpose, infinite numbers of stress functions with singularities are shown. From the stress functions with singularities, it is shown that we can explain the physical meaning of the order of a singularity of solution. This is an extension of a result gained in an investigation of the order of singularities by Sternberg and et al. It is confirmed that the expression of the distribution of the centers of dilatation on a finite straight line is obtained by superposing the expression of the distribution of radial forces on the line upon two Kelvin's solutions (two concentrated forces acting at the tips of the line).

Chapter 5 and 6 are concerned with applications of the stress functions shown in the previous chapters from 1 to 4.

In Chapter 5, under the title of "Applications of stress functions (analytical methods)", the stress functions shown in the paper are applied to practical problems by analytical methods. Problems treated here are as follows: (i) A circular hollow cylinder is radially deformed in a taper form at the inner face of the cylinder. The solution is obtained by an application of the stress functions shown in Chapter 2. (ii) A hollow elastic sphere with two tapered holes is compressed by two rigid taper pins inserted to the holes. The solution is obtained by an application of the stress functions with singularities shown in Chapter 4. (iii) An infinite elastic thick plate with semi circular pits is twisted by torsional forces acting at the surfaces of the pits. The solution is obtained by an application of the stress functions for body force problems shown in Chapter 3.

In Chapter 6, under the title of "Applications of stress functions (numerical methods)", applying Green's functions for body force problems, numerical methods of solution for usual boundary value problems of elasticity are proposed. Problems considered here are as follows: (i) An elastic half space with a circular cylindrical hole of a finite depth is twisted by a circular rigid cylinder inserted in any depth into the hole of the half space. The problem is an extension of Luco's problem. The method of solution is an application of Green's functions shown in Chapter 3. (ii) A circular solid elastic cylinder with a circumferential groove of semi circular or rectangular form is subjected to axial tension (compression) forces. The problem of the case of a semi circular groove has been treated by several authors, but it seems that their results do not always agree with each other. The results of this paper are in fairly good agreement with those of Sato and et al.'s calculated by a finite element method and measured by strain gages. To consider the problems of a cylinder with a groove, Green's functions for body force problems of a circular solid cylinder are constructed by application of the stress functions shown in Chapters 2 and 3.

The numerical methods proposed in Chapter 6 can be easily applied to other boundary value problems expressed in cylindrical co-ordinates

まえがき

弾性論の目的は、外力を受ける物体にどのような応力と変位が生じているかを正確に知り、その普遍的な法則性をは握しようとするにあるといえる。これはまた、科学技術の進歩による機械構造物の軽量化の要請に基づいて精密な応力や変形を求めるという要求に応じようとするものであって、力を受ける物体の形状の力学的意味を明らかにしそして力を受ける物体の形状を改善するこ

とによって、その応力分布や変形を制御しようとするものであるといえよう。また最近、材料の破壊の力学などの研究において弾性論が重要な役割を果たしてきており、近接学問を支える基礎理論としても、弾性論の重要性が再認識されてきている。

周知のように弾性論は比較的長い歴史をもつ学問であるが、その進歩は非常にのろく、現在のところでは、工学的に要求されている有限体などの問題に対してはまだわずかの解しか提示することができず、実用性の高い問

題への長い階段を一段一段と地道に登っている姿が現状のように思われる。かつて筆者は、円筒体にテーパー棒を挿入して円筒体を押し広げる機構を考察したことがあるが、その際、この円筒体は軸対称変形で三次元弾性問題のうちでも比較的きれいな(単純な)形の変形の場合であるにもかかわらず、その応力と変形を解析することは容易でなく、現在の弾性論はあまりにも遅れていて実際問題の解決能力に乏しいことを痛感し、このような問題の解法を一步でも前進させようと決意した。すなわち、問題を解決するには解決を可能にするための方法が必要であり、この方法を蓄積し発展させることによって、現在では解決できない問題が将来において自由自在に解決されるようになるものと思われる。

この論文は、弾性問題を解決する方法として現在本質的に重要な役割を演じている応力関数を用いて、物体力のある三次元軸対称変形問題の解法とその応用を述べたもので、その考察範囲は、静的な場合が主であるが動的弾性論も含んでいる。研究の目的、内容の概説、従来の研究との関係などについては各章の始めに緒言として述べることにしてここでは詳しく触れないが、この論文の概略は次のようになる。

本文は六つの章から構成されている。第1章はこの研究全体の出発点となるもので、動的軸対称弾性問題に対し3個の応力関数を導入した解法が示され、その完全性が論じられる。またその特別な場合として静的な場合に対する解法が得られ、既知の Love の解法と比較される。第2章では第1章で提示された応力関数の特徴が考察され、物体力が存在しないときには3個の応力関数から一般性を失うことなく1個の応力関数を省略できることの可能性、直角座標系での Galerkin の応力関数との関係、ねじり問題の各応力関数の同等性などが述べられる。第3章では、第1章で提示された弾性問題の解法から軸対称物体力問題の応力関数が導かれ、それを応用して、任意分布の軸対称物体力が働く半無限体問題の一般解法が示される。また、熱応力問題に対する Goodier の熱弾性ポテンシャルと物体力問題の応力関数の関係が明らかにされる。初期値問題の応力関数もこの章で示される。第4章では特異性をもつ無限個の応力関数が示され、それを応用して集中力問題が考察される。また、荷重点における解の特異性のオーダーの物理的意味についても述べられる。

第5章と第6章は応力関数の応用で、第4章までの結果が具体的な形をもつ弾性体の問題に適用される。すなわち、第5章では、第2章の結果を応用して「有限厚肉円筒が内圧を受けてテーパー状に押し広げられる問題」、第3章で述べた物体力問題の応力関数を応用して「半球

ピットにねじりを受ける無限厚板」、第4章で示された特異性をもつ応力関数を応用して「剛体テーパー棒の差し込みを受ける中空厚肉球問題」が考察される。第6章では、ある円周上に物体力の働く問題の解(グリーン関数)を応用して、弾性問題の数値解法が考察される。取り扱われる問題は「非貫通円孔に差し込まれた剛体丸棒にねじりを受ける半無限体」、「環状みぞをもつ丸軸の引張り」であるが、示される方法の他の問題への拡張は容易である。上述の剛体丸棒にねじりを受ける問題の解法は、その特別な場合として、円孔の底まで剛体丸棒が完全に差し込まれたときの Luco の問題にも適用できるので、この問題に対し、Luco の解と示された数値解法による結果との比較が行なわれる。

以上のように、第2章から第4章は第1章の結果をさらに発展させたものであり、第5章と第6章は第4章までの結果を応用して具体的な形をもつ弾性体の問題の解析を行っている。各章のおもな結果は、各章末にそれぞれ結言として要約されている。

第1章 軸対称弾性問題の応力関数の基礎式

1.1 緒言

三次元弾性体の変位ベクトル U を円柱座標 (r, θ, z) で表したとき、もし U が角度 θ によって変化しないならば、その弾性体の変形は z 軸に関して軸対称であるという。このとき、時間 t における一様等方性弾性体の変位ベクトル $U(r, z, t)$ は、円柱座標で表された次の連立偏微分方程式を満足することが知られている。

$$\mu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_j + \frac{\mu}{r^2} [0, 0, u_3] + \frac{\mu}{1-2\nu} \text{grad}_j \text{div } U + F_j = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_j \quad \dots (1.1)$$

ここに $u_j(r, z, t)$, $F_j(r, z, t)$ は変位ベクトル U , 物体力ベクトル F の j 座標方向成分を表す。ただし添字 j は、円柱座標 r ($j=1$), θ ($j=2$), z ($j=3$) を意味する。また、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

であり、 μ, ν および ρ は弾性体の横弾性係数、ポアソン比および密度を表す。

動的荷重を受けて弾性体の変位 u_j が時間的に変化する場合はもちろんのこと、 u_j が時間 t によって変化しない場合も、変形が軸対称である弾性問題を解くことは、その弾性体の境界条件などを満足する u_j を弾性基礎方程式(1.1)から求めることに帰着される。しかしながら、ある特殊な場合を除いてその方法は確立されておらず、そのため現在の弾性論は、工学的に解決が要望されている弾性問題に対して、まだその解を提示できない場合が

多い。

ところで弾性問題を解くには、上述の変位で表された弾性基礎方程式 (1.1) から出発する考え方とは別に、応力で表された弾性基礎方程式とひずみの適合条件から出発する考え方があり、Love^(1.1)はこの応力で表された弾性基礎方程式から出発して、静的な場合に、軸対称弾性問題の一つの解法を示した。それは、重調和方程式

$$\nabla^4 \chi = 0 \quad \dots (1.2)$$

を満足する1個の未知関数 (このような未知関数のことを応力関数と呼んでいる) $\chi(r, z)$ によって u_j を、 E を縦弾性係数として、

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad u_2 = 0, \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ 2(1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad \dots (1.3)$$

のように表現したもので、これまで実際にしばしば応用されている。しかし、この Love の応力関数 χ による解法が静的軸対称弾性問題の解法として、(i)完全性をそなえているかどうか、という基本的なことがらに対する検討がまだなされていなかったように思われる。また、上記の Love の解法は、(ii)動的荷重の働く問題、(iii)ねじれ変形を伴う問題、(iv)物体力の働く問題に対しては適用できない。

Westergaard^(1.2)は Love の応力関数と Galerkin^(1.3)が直角座標系で示したベクトル応力関数の z 軸方向成分との関連性を明らかにし、重調和方程式 (1.2) の代りに非斉次重調和方程式

$$\nabla^4 \chi = -\frac{F_3}{1-\nu} \quad \dots (1.4)$$

を満足する応力関数 χ をとることにより、 z 軸方向にのみ静的物体力 $F_3(r, z)$ が働く問題にも適用できるように Love の解法を一般化した。その他の方向に働く物体力に関しては論じなかった。

一般に、直角座標系で表現された形では、応力関数は単独の方程式を満足すればよい解法であっても、それを円柱座標系に変換すると応力関数は連立方程式を満足しなければならない形になり、実用上、役に立たないものになってしまう場合が多い。そのため、変形が軸対称でないときの円柱座標系における弾性問題の解法はいまだ明らかでなく、現在、非軸対称問題の解法として知られている Boussinesq など^{(1.4)~(1.7)}の解法は、その一部の解を求めることができるにすぎないのである*。

以上のような理由から、本章では、単独の方程式を満

* 円柱座標系では、物体力およびねじれ変形を伴う任意の三次元問題の、単独の方程式を満足する応力関数による解法はまだ知られていない^(1.8)。少なくとも、1その完全性の証明されたものはまだないと思う。

足する3個の応力関数を導入して、動的物体力およびねじれ変形も考慮した軸対称動的弾性問題の解法を、円柱座標で直接示す。ここに示される解法は、その特別な場合として静的問題の解法も含んでおり、また、この静的な場合の解法はその特別な場合として前述の Love の解法も含んでいる。すなわち本章で提示される解法は、前述の(ii)から(iv)までの問題にも適用できる。また、(i)の解法の完全性もそなえていることが明らかにされる。

1.2 軸対称弾性問題の応力関数

前節でも述べたように、弾性問題の研究においては、弾性体の変位を応力関数の微分形で表現しておくことが本質的に重要な役割を果たしている^{(1.4)~(1.6), (1.9)~(1.11)}。そこで本節では、変形が軸対称であるという制限のみで、物体力もねじれ変形も存在しかつ時間的に変化する一般的な場合の三次元弾性体の変位を応力関数によって表現することにする。そのため Mindlin^(1.12)の考察方法すなわちヘルムホルツの定理を用いる方法をここでも踏襲することにする。

変位で表された弾性基礎方程式 (1.1) から出発する。ベクトルの分割に関するヘルムホルツの定理により、任意の変位ベクトルを回転のない変位ベクトルと体積変化のない変位ベクトルという性質の明らかな二つのベクトルの和として表すことができるので、方程式 (1.1) を満足する変位 u_j を一般性を失うことなく次式のようにおくことができる。

$$u_j = \text{grad}_j A + \text{rot}_j B \quad \dots (1.5)$$

ここに $A(r, z, t)$ はスカラー・ポテンシャル、 $B(r, z, t)$ は $\text{div } B = 0$ を満足するベクトル・ポテンシャルである。なお、本論文で取り扱う関数は特にことわらない限り、すべて必要なだけ微分可能とする。

変位 u_j を式 (1.5) の形に分割することにより、方程式 (1.1) は次式のように変形される。

$$\begin{aligned} & \left(\square_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\square_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{grad}_j A' + \text{rot}_j B' \right\} \\ &= -\frac{F_j}{\mu}, \quad (j=1, 2) \\ & \square_1^2 \square_2^2 \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial A'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_2') \right\} = -\frac{F_3}{\mu} \end{aligned} \quad \dots (1.6)$$

ただし、 A', B_j' は

$$\begin{aligned} A &= \square_1^2 A' \\ B_j &= \left(\square_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_j' + \frac{1}{r^2} [0, 0, B_3'] \end{aligned} \quad \dots (1.7)$$

であり、 \square_1^2 は円柱座標でのダランベリアンで

$$\square_1^2 = \nabla^2 - \frac{1}{C_n^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (n=1, 2) \quad \dots (1.8)$$

を、また C_n は応力波の伝ば速さで次式を表す。

$$C_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cdot \frac{\mu}{\rho}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \dots(1.9)$$

式(1.6)の中かっこ内はある未知ベクトルの成分を表している。それでいま

$$2\mu \left\{ \frac{1}{1-2\nu} \text{grad } A' + \frac{1}{2(1-\nu)} \text{rot } B' \right\} = \phi \quad \dots(1.10)$$

とおくことにすれば、未知関数 A' , B'_j が連立している方程式(1.6)は、3個の $\phi_j(r, z, t)$ を未知数とした、連立しない3個の方程式の形に変形されて次のようになる。

$$\left(\square_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\square_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi_j = -\frac{F_j}{1-\nu}$$

$$\square_1^2 \square_2^2 \phi_3 = -\frac{F_3}{1-\nu} \quad (j=1, 2) \dots(1.11)$$

式(1.11)の未知関数 ϕ_j (ϕ の j 方向成分)を軸対称弾性問題の応力関数と呼ぶことにする。この ϕ_j で u_j を表示すれば次式のようになる^{(1.13), (1.14)}。

$$2\mu u_j = 2(1-\nu) \left\{ \left(\square_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi_j + \frac{1}{r^2} [0, 0, \phi_3] \right\}$$

$$- \text{grad}_j \text{div } \phi \quad \dots(1.12)$$

以上の結果から次のことがわかる。応力関数 ϕ_j を導入して変位 u_j を式(1.12)のように ϕ_j の微分形で表せば、3個の未知関数 u_j が連立している方程式(1.1)は、3個の ϕ_j を未知関数とする連立しない方程式(1.11)に変換される。

1.3 静的な場合の応力関数

前節で示された式(1.11), (1.12)において物体力 F_j と応力関数 ϕ_j が時間 t に無関係であるとすれば、静的軸対称問題の解法が得られる。すなわち、静的な場合の弾性体の変位 u_j は、方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 \phi_j = -\frac{F_j}{1-\nu}, \quad (j=1, 2)$$

$$\nabla^4 \phi_3 = -\frac{F_3}{1-\nu} \quad \dots(1.13)$$

を満足する3個の応力関数 ϕ_j により次式のように表される^{(1.15), (1.16)}。

$$2\mu u_j = 2(1-\nu) \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi_j + \frac{1}{r^2} [0, 0, \phi_3] \right\}$$

$$- \text{grad}_j \text{div } \phi \quad \dots(1.14)$$

ここに示された静的な場合の解法において $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $\phi_3 = \chi$ とおけば、1.1節で述べた Love の解法が得られる。

1.4 解法の完全性

これまでも述べたように弾性問題の研究においては、弾性体の変位あるいは応力を応力関数を用いて表現しておく手法が非常に重要な地位をしめしているが、このとき、ある応力関数を用いた解法がはたして弾性問題のすべての解を包含しているかどうかということが問題になってくる。ある応力関数による解法が、ある定義された範囲内での弾性問題の解をすべて包含しているとみ

なせるとき、その解法はその定義された範囲内で、完全性をそなえているといえることになる。そこでここでは、方程式(1.11)を満足する応力関数 ϕ_j で表された式(1.12)の変位 u_j は、動的軸対称弾性問題に対し完全性をそなえていること、また、方程式(1.13)を満足する応力関数 ϕ_j で表された式(1.14)の変位 u_j は、静的な場合に対して完全性をそなえていることを述べる。

1.2節で論じたことの本質的意味は、変位 u_j を未知関数とする連立方程式(弾性基礎方程式)(1.1)を、応力関数 ϕ_j を未知関数とする連立しない方程式(1.11)に変形したということにある。弾性基礎方程式のこの変形は、弾性体の変位ベクトルを、その一般性が失われることのないようにして、性質が明らかで数学的処理の容易な変形を表すベクトルの和の形に分割することによって行ったもので、その変形過程においては何らの近似も省略も加えられていない。したがって、応力関数 ϕ_j が満足すべき方程式(1.11)は、実は、変形された弾性基礎方程式であるから、式(1.12)の変位 u_j は軸対称弾性問題のすべての解を包含しているとみなせるであろう。換言すれば、実際にすべての解を入手できるかどうかは、方程式(1.11)からそのすべての応力関数を取り出すことができるかどうかにかかっていることになる。以上のことは、静的な場合についてもそのままいえる。

1.5 結 言

本章では、変形が軸対称である三次元弾性体の変位を、単独の方程式を満足する3個の応力関数で表現した。この3個の応力関数による解法から、その特別な場合として静的な場合の解法を示し、それは、静的軸対称問題の研究においてこれまで重要な役割を果たしていた Love の解法を含んでいることを明らかにした。

本章で提示された解法は Love の解法に比べて次の4点において広い適用性をもっている。(i)動的な場合も含めて変形が軸対称である三次元弾性問題に対し、 C^∞ のクラスにおいて解法の完全性をそなえている。(ii)動的荷重の作用する問題にも適用できる。(iii)任意分布の軸対称物体力の作用する問題にも適用できる。(iv)ねじれ変形を伴う問題にも適用できる。

第2章 物体力のない軸対称弾性問題の応力関数

2.1 緒 言

前章において、変形が軸対称である三次元弾性体の変位を応力関数を用いて表現し、それは解法の完全性をそなえていることを示した。弾性問題を解析することは、原理的には、その問題に課せられた境界条件などに適合する応力関数を応力関数の満足すべき方程式から求めればよいといえる。しかし実際には、応力関数の形を見つ

けることが容易でない場合が少なくない。そのおもな理由として、応力関数の数は問題の境界条件数が増すに従って一般に多く必要になるが、応力関数の満足すべき方程式の解がまだ十分には知られていないため^(2.1)、都合のよい応力関数の形が用意されていないことをあげることができる。そのため、境界条件のすべてを完全に満足させることが困難であったり、また、全く別々に提示された異なる応力関数による解法を組み合わせる利用するという^{(2.2), (2.3)}、一見きみような方法が採用されることがある。

また、問題は積分や積分方程式などに帰着されることが多いが、その解が求まらないこと、特にフーリエ変換などの積分変換を応用した場合では逆変換は求まらないことが普通なくらいで、そのため実際には、力づくの数値計算にたよっているというのが現状であろう^(2.1)。換言すれば現在の弾性論は、将来において解決されるであろう機械要素などの有限体弾性問題に向って一步一步進んでいる、まだまだ遅れた学問の一つといえよう^{(2.5)~(2.7)}。

これらの問題点をすべて解決しようとしても早急に解決できるものではないであろうが^(2.4)、その方向に向っての地道な努力の一つとして、ここでは、前章で提示された3個の応力関数をおもに物体力のない場合に考察し、その特徴あるいは性質などをいくつか明らかにしておく。

2.2 ガレルキンの応力関数との関係

本節の目的は前章で提示された応力関数と動の場合にまで一般化された Galerkin の応力関数との関係を調べることにあるが、その前に、Galerkin の応力関数を取りまくこれまでの状況を明らかにしておく。

Galerkin^(2.8)は1930年、直角座標系 (x, y, z) で表された静的三次元弾性問題に対し、4階の偏微分方程式を満足する3個の応力関数を導入した解法を示し、厚板問題を論じた。Papkovitch^(2.9)は Galerkin の解法を整理し、2階の偏微分方程式を満足する4個の応力関数を導入した解法を導いたが、それと同じ解法を Neuber^{(2.10), (2.11)}も別の方法で示した。これは現在、Neuber-Papkovitch の解法と呼ばれている。これらの解法の完全性は Mindlin^(2.12)が示している。また長谷川^(2.13)は、Galerkin の応力関数に平面ひずみ状態という条件を与えることにより Airy の応力関数が導けることならびに応力関数の省略可能性を示している。Galerkin の応力関数と Boussinesq の応力関数の関係は Sternberg^(2.14)らによって論じられている。

Galerkin の解法は動の場合に一般化できることが Iacovache によって示されたが^(2.14)、同じ結果を Teodorescu^(2.15)は別の方法で示している。またその完全性は

Sternberg と Eubanks^(2.14)が証明している。上述の結果から動的な場合に一般化された Neuber-Papkovitch の解法を導くことができるが、それは応力関数の満足すべき方程式が連立方程式になるので、有力な解法とはならないと思う。完全性が証明されかつ連立しない方程式を満足する応力関数を用いた三次元問題の解法は、上述の一般化された Galerkin の解法のみのものである。定常調和振動に対して Зильберберг^(2.16)らは Neuber-Papkovitch の解法を導いているが、応力関数の方程式はやはり連立型である。

さて、前章の1.1節でも述べたように、Westergaard^(2.17)は Love の応力関数と Galerkin の応力関数の関係を指摘している。そこでここでは、同様の事実が動の場合に対しても成立していることを示すと同時に、Westergaard の触れなかった x および y 軸方向成分についても考察する。

Galerkin の解法を円柱座標系に一般的に変換すると応力関数の満足すべき方程式は連立型になり、実際問題の解法としては、あまり役に立たないものとなる^{(2.18), (2.19)}。しかし、変形が軸対称であるという条件のもとに変換すれば、応力関数の満足すべき方程式は円柱座標でも連立しなくなり、その結果は、前章で示された式(1.11)、(1.12)の解法と完全に一致する。このことは静的な場合に対してもそのままいえるから、1.1節で述べた Westergaard の結果も明らかに含んでいる。

なお、Neuber-Papkovitch の解法は変形が軸対称の場合でも応力関数の方程式は連立型となる。しかし静的軸対称の場合には単独の方程式になる^{(2.19)~(2.21)}。

2.3 応力関数形の例

2.3.1 検討の目的

本章2.1節でも述べたように、弾性問題を解析することはその問題に課せられた境界条件などに適合する形の応力関数を見つければよいのであるが、実際にはそれが容易でない場合が少なくない。そのため現在のところでは物体の形状に何らかの仮定をもうけて、たとえば半無限体とか無限円柱などのように、境界条件の数を減らして問題を単純化して取り扱う方法がしばしば採用されているのである。仮定の数を少なくして実在の有限体問題に近づくにつれ、境界条件の数が、したがってそれを満足させるに必要な応力関数の数が一般には増してくるから、1個でも多くの応力関数形を用意しておくことはその応用上、応力関数形選定の自由度を高めるといえる。

応力関数の満足すべき方程式の解を求める方法として、変数分離法によるもの^{(2.22)~(2.24)}、多項式によるもの^{(2.25)~(2.28)}、また Sneddon らがよく用いる積分変換によるもの^{(2.27), (2.28)}などが考えられる。フーリエ級数な

どの手法を応用するには変数分離された形の応力関数が現在のところ最も便利と考えられるので、ここでは静的な場合に対し、応力関数 ϕ_j の形を変数分離法で求め、それに検討を加えることにする^(2,29)。

2.3.2 応力関数 ϕ_3

静的かつ物体力不在のときの応力関数 ϕ_3 は重調和方程式

$$\nabla^4 \phi_3(r, z) = 0 \quad \dots(2.1)$$

を満足するものとなる。いま

$$\nabla^2 \phi = \Phi(r, z) \quad \dots(2.2)$$

とおけば、方程式(2.1)は

$$\nabla^2 \Phi(r, z) = 0 \quad \dots(2.3)$$

と表せる。そこで方程式(2.3)の解 Φ を求め、それを方程式(2.2)の右辺に代入して ϕ_3 を求めることにする。方程式(2.3)の変数分離された形の解として次式のもの^(2,30)が得られている。

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \{a_1 J_0(x) + a_2 Y_0(x)\} (b_1 e^{ax} + b_2 e^{-ax}) \\ \Phi_2 &= \{a_3 I_0(x) + a_4 K_0(x)\} (b_3 \sin \alpha z + b_4 \cos \alpha z) \\ \Phi_3 &= (a_5 + a_6 \log r) (b_5 z + b_6) \end{aligned} \quad \dots(2.4)$$

ここに $J_n(ar)$, $Y_n(ar)$ は n 階の第1種および第2種ベッセル関数、 $I_n(ar)$, $K_n(ar)$ は n 階の第1種変形および第2種変形ベッセル関数を表し、 a, b, α は任意定数である。

以上の結果から、応力関数 ϕ_3 として次式が得られる。

$$\phi_3 = \sum_{n=1}^{10} \phi_n \quad \dots(2.5)$$

ここに ϕ_n は次式を表す。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (a_1 J_0 + a_2 Y_0) (b_1 e^{ax} + b_2 e^{-ax}) \\ \phi_2 &= \frac{r}{2\alpha} (a_1' J_1 + a_2' Y_1) (b_1' e^{ax} + b_2' e^{-ax}) \\ \phi_3 &= \frac{z}{2\alpha} (a_1'' J_0 + a_2'' Y_0) (b_1'' e^{ax} - b_2'' e^{-ax}) \\ \phi_4 &= (a_3 I_0 + a_4 K_0) (b_3 \sin \alpha z + b_4 \cos \alpha z) \\ \phi_5 &= \frac{r}{2\alpha} (a_3' I_1 - a_4' K_1) (b_3' \sin \alpha z + b_4' \cos \alpha z) \\ \phi_6 &= -\frac{z}{2\alpha} (a_3'' I_0 + a_4'' K_0) (b_3'' \cos \alpha z - b_4'' \sin \alpha z) \\ \phi_7 &= (a_5 + a_6 \log r) (b_5 z + b_6) \\ \phi_8 &= \frac{1}{4} r^2 \{a_5' + a_6' (\log r - 1)\} (b_5' z + b_6') \\ \phi_9 &= \frac{1}{2} z^2 (a_5'' + a_6'' \log r) \left(\frac{1}{3} b_5'' z + b_6'' \right) \end{aligned} \quad \dots(2.6)$$

ただし ϕ_{10} は $\nabla^4 \phi_{10} = 0$ を満足する r と z の多項式である。

2.3.3 従来の結果との比較

応力関数 ϕ_3 は静的なときには、Love の応力関数 χ と一致する。応力関数 χ を応用して論じられた問題はこれまでかなりあり^{(2,31)~(2,39)}、また、その応力関数形を考察したものもあるが^{(2,22)~(2,24)}、そこに示されたものは次

式で要約されると思う。

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{6} A_0 z^3 + B_0 z \log r + \frac{1}{2} C_0 z r^2 + \{A' I_0(x) \\ &\quad + B' r I_1(x) + A'' K_0(x) + B'' r K_1(x)\} (C_1 \sin \alpha z \\ &\quad + C_2 \cos \alpha z) + \{A J_0(x) + B Y_0(x)\} (C' \sinh \alpha z \\ &\quad + D' z \cosh \alpha z + C'' \cosh \alpha z + D'' z \sinh \alpha z) \end{aligned} \quad \dots(2.7)$$

ここに $x = ar$, A, B, C, D は任意定数である。

式(2.7)の χ は、式(2.5)の ϕ_3 において、その任意定数 $a_1', a_2', a_3'', a_4'', a_5, a_6'', a_6', b_5, b_6'$ を零としたものと同等である。したがって、式(2.5)の ϕ_3 は従来の応力関数 χ をすべて含んでいる。

2.3.4 応力関数 ϕ_1 と ϕ_2

応力関数 ϕ_3 の場合と同様な考察を行えば、静的かつ物体力不在のときの応力関数 ϕ_j ($j=1, 2$) として次式を求めることができる。

$$\phi_j = \sum_{n=1}^{10} \phi_n \quad \dots(2.8)$$

ここに ϕ_n は次式を表す。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (a_7 J_1 + a_8 Y_1) (b_7 e^{ax} + b_8 e^{-ax}) \\ \phi_2 &= \frac{r}{2\alpha} (a_7' J_2 + a_8' Y_2) (b_7' e^{ax} + b_8' e^{-ax}) \\ \phi_3 &= \frac{z}{2\alpha} (a_7'' J_1 + a_8'' Y_1) (b_7'' e^{ax} - b_8'' e^{-ax}) \\ \phi_4 &= (a_9 I_1 + a_{10} K_1) (b_9 \sin \alpha z + b_{10} \cos \alpha z) \\ \phi_5 &= \frac{r}{2\alpha} (a_9' I_2 - a_{10}' K_2) (b_9' \sin \alpha z + b_{10}' \cos \alpha z) \\ \phi_6 &= -\frac{z}{2\alpha} (a_9'' I_1 + a_{10}'' K_1) (b_9'' \cos \alpha z - b_{10}'' \sin \alpha z) \\ \phi_7 &= (a_{11} r + a_{12} r^{-1}) (b_{11} z + b_{12}) \\ \phi_8 &= \frac{r}{4} \left(\frac{1}{2} a_{11}' r^2 + 2 a_{12}' \log r \right) (b_{11}' z + b_{12}') \\ \phi_9 &= \frac{1}{2} (a_{11}'' r + a_{12}'' r^{-1}) \left(\frac{1}{3} b_{11}'' z + b_{12}'' \right) z^2 \end{aligned} \quad \dots(2.9)$$

ただし ϕ_{10} は $(\nabla^2 - 1/r^2) \phi_{10} = 0$ を満足する r と z の多項式である。

2.4 応力関数の省略可能性

ここでは、物体力 F_1 と F_3 がともに不在のときには、前章で提示された3個の応力関数 ϕ_j のうちから ϕ_1 か ϕ_3 のどちらかを任意に1個省略しても解法の一般性は失われないこと、また、 F_1 か F_3 のどちらかが不在のときには、不在の物体力に対応している ϕ_1 か ϕ_3 を省略してもやはり解法の一般性は失われないことが予想できることを述べる。物体力の存在する問題の解は、物体力による解と物体力が不在の問題の解を重ね合わせることにより求められるから、物体力が不在のときのことを考えておけばよい。

いま式(2.5)の ϕ_{10} として

表 2.1 軸対称ねじり問題の解法

解 法	$2\mu u_2$	τ_{rz}	$\tau_{\theta z}$	応力関数の条件
Boussinesq	$-2 \frac{\partial S}{\partial r}$	$-\left(2 \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right) S$	$-\frac{\partial S}{\partial r \partial z}$	$\nabla^2 S = 0$
Neuber-Papkovich	$-4(1-\nu)N$	$-2(1-\nu)r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N}{r}\right)$	$-2(1-\nu) \frac{\partial N}{\partial z}$	$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) N = 0$
Michell		$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial M}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial M}{\partial r}$	$\left(\nabla^2 - \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) M = 0$
文献(2.42)	$r\phi$	$r \frac{\partial \phi}{\partial r}$	$r \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$\left(\nabla^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \phi = 0$
本論文の ϕ_2	$2(1-\nu) \cdot \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) \phi_2$	$(1-\nu) \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) \phi_2 \right\}$	$(1-\nu) \cdot \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$	$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2 \phi_2 = 0$

$$\phi_{10} = A_1(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2) + A_2\{35z^4 - 30z^2(r^2 + z^2) + 3(r^2 + z^2)^2\} \quad (2.10)$$

を, また式(2.8)の ϕ_{10} として

$$\phi_{10} = B_1(2z^2 - r^2)r \log r + B_2\left(\frac{z^4}{r} - \frac{3}{2}r^3 \log r\right) \quad \dots(2.11)$$

を採用する。ここに A, B は任意定数である。

次の結果が成立することは容易に確かめられる。式(2.8)の任意の ϕ_1 に対し

$$u_1(\phi_1) = u_1(\phi_1' + \phi_1'' + \dots + \phi_1^{(n)}), \\ u_3(\phi_1) = u_3(\phi_1' + \phi_1'' + \dots + \phi_1^{(n)}) \quad \dots(2.12)$$

の二つの式が同時に成立する応力関数 $\phi_1' + \phi_1'' + \dots + \phi_1^{(n)}$ が常に存在し, そしてまた式(2.5)の任意の ϕ_3 に対し

$$u_1(\phi_3) = u_1(\phi_1' + \phi_1'' + \dots + \phi_1^{(m)}), \\ u_3(\phi_3) = u_3(\phi_1' + \phi_1'' + \dots + \phi_1^{(m)}) \quad \dots(2.13)$$

の二つの式が同時に成立する応力関数 $\phi_1' + \phi_1'' + \dots + \phi_1^{(m)}$ も常に存在する。ここに $n, m \geq 1$ である。この結果は, ϕ_1 と ϕ_3 が同等の解を表すことを意味する。

2.5 ねじり問題の応力関数

前章で示された3個の応力関数 ϕ_i のうち, ϕ_2 はねじれ変形を表している。ところで, 物体力の存在しない静的軸対称ねじり問題に対しては, すでにいくつかの解法が知られている^{(2.40)~(2.42)}。それらを整理すると表2.1のようになる。ここに S, N, M, ϕ, ϕ_2 は応力関数である。

ここに示されている応力関数はそれぞれ異なる形の方程式を満たすようになっているが, それらが表す解はすべて同等あるいは同等であることが予想できる。例として応力関数 N と M の関係を考えてみる。目的としていることは, 方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) N = 0, \left(\nabla^2 - \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) M = 0 \quad \dots(2.14)$$

を満足する N と M に対し

$$-2(1-\nu)r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial M}{\partial z}, \\ -2(1-\nu) \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial M}{\partial r} \quad \dots(2.15)$$

の二つの関係が同時に成立することが常に可能であることを示せば達せられる。式(2.15)の関係は次式のように書き直してもよい。

$$2(1-\nu)r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N}{r}\right) = \frac{\partial M}{\partial z}, \\ -2(1-\nu)r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N}{r}\right) = \frac{\partial M}{\partial r} \quad \dots(2.16)$$

いま M が与えられたものとする。式(2.16)から次式の関係が得られる。

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r \partial z} = 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N}{r}\right) \right\} \\ = -2(1-\nu)r^3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{N}{r}\right) \quad \dots(2.17)$$

しかるに, この関係を満たす N は存在する。なぜならば式(2.17)から式(2.14)の第1式を導くことができる。 N が与えられた場合も同様である。

なお, Арутюнян と Абрамян^(2.43) は上述とは別の方法で M と ϕ などの関係を考察している。

2.6 結 言

本章では, 前章で提示された3個の応力関数をおもに物体力のない場合に考察した。おもな結果を要約すると次のようになる。

- (1) 前章で示された応力関数と動的な場合にまで一般化された Galerkin の応力関数, Neuber-Papkovich の応力関数などの関連性を考察した。
- (2) 変形が軸対称である静的弾性問題を具体的に解決するための応力関数形を変数分離された形で求め, それは従来のものをすべて含んでいることを示した。
- (3) 物体力が存在しないときには, 3個の応力関数のうちから1個省略しても解法の一般性は失われないこと

が予想できる。このことはまた次のことを意味する。Love の応力関数による解法は、ねじれ変形と z 軸方向以外に働く物体力が存在しない静的軸対称三次元問題に対して、 C^∞ のクラスにおいて完全性をそなえていることが予想できる。

(4) 前章で提示されたねじり問題の応力関数の静的で物体力不在のときのものと、すでに知られている Michell, Neuber-Papkovich, Boussinesq, などの応力関数はそれぞれ同等の解法であることが予想できる。

第3章 軸対称物体力問題の応力関数

3.1 緒言

弾性問題を考察するとき、物体に作用する外力は二つの種類すなわち物体の表面に働く表面力と物体の領域内において働く物体力にわけて取り扱われている。

物体力問題について、古くは無限体領域内の1点に単一集中力が働く問題に対する Kelvin^(3.1) の解、半無限体領域内の1点に単一集中力が働く問題に対する Mindlin の解など^(3.2)があるが、Mindlin らの解は、物体力問題の解法というよりも特異性をもつ解を応用して得られたものである。Melan^(3.3) は Airy の応力関数により、Green^(3.4) は複素関数で、そして Sneddon^(3.5) はフーリエ変換とラプラス変換を応用して物体力の働く一般的な平面問題を論じている。Sneddon^{(3.6), (3.7)} はまた、無限体および半無限体領域に物体力が任意分布する問題の解法を同じくフーリエ変換とラプラス変換を用いて直角座標系で示している。しかし、この解法を円柱座標系に変換することは困難のようである。

円柱座標系で物体力問題を論じたものは少なく、半無限体領域内の一円形面上に等分布力が働く問題を扱った Dean^(3.8) ら、単一集力が働く無限円柱を扱った Conway^(3.9)、回転円筒の遠心力を扱った柴原・尾田^(3.10)、無限体領域内の一円周上に物体力が働くときの変位を示した Kermanidis^{(3.11), (3.12)} の研究以外にはあまり見あたらないようであり、それも一般的な立場から物体力問題を取り扱ったものではない。古橋^(3.13) も物体力問題を論じているが、これは解の性質などを考察したもので境界条件については触れていない。物体力問題の解の応用性については、西谷・村上^(3.14) が体積力法^(3.15) を提案して破壊の力学の応力拡大係数を論じており、岡村・島田^(3.16) は三次元非軸対称問題の一般的数値解法を単一集中力問題の解を用いて示し、また Kermanidis^(3.11) は軸対称問題を積分方程式を解く問題に帰着させている。

物体力問題の解法を論ずることの主目的は、厳密な意味での物体力の問題を考察することよりも、通常の境界値問題を考察するためにそれを応用することにあるとい

える^{(3.17)~(3.21)}。その例は第5章と第6章で述べることにして、本章では、任意分布の動的軸対称物体力が働く弾性問題の応力関数による解法を示す。また、静的物体力問題の応力関数も示し、それを応用して、任意分布の軸対称物体力が働く半無限体問題の一般解法を示す。Goodier^(3.22) の熱弾性ポテンシャルと物体力問題の応力関数の関係、初期値問題の応力関数も本章で考察される。

3.2 動的物体力問題の応力関数

3.2.1 定義

動的物体力問題の応力関数 ϕ_j を非斉次偏微分方程式 (1.11) の特殊解として定義する。この定義により、動的物体力 $F_j(r, z, t)$ に帰因する弾性体の変位 u_j は、やはり式 (1.12) から求められる。

3.2.2 ラプラス変換による方法

任意分布の動的軸対称物体力 F_j が無限体領域に存在する問題の応力関数 ϕ_j をラプラス変換を用いて求める。ただし F_j は、 t に関しては $t \geq 0$ において区分的に連続かつ $t \rightarrow \infty$ のとき指数位とする。また r と z に関しては、デリクレの条件^(3.23)ならびに

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |F_j| = O(r^{-\epsilon + \frac{1}{2}}), \quad \lim_{z \rightarrow \pm \infty} |F_j| = O(|z|^{-\epsilon}) \quad \dots (3.1)$$

を満足するものとする。ここに $\epsilon > 1.0$ である。このとき F_j を次式のように表すことができる。

$$\bar{F}_j = \frac{R_\epsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-\nu)} d\zeta \int_0^{\infty} \alpha J_m(\alpha r) d\alpha \cdot \int_0^{\infty} \eta \bar{F}_j(\eta, \zeta, s) J_m(\alpha \eta) d\eta \quad (3.2)$$

ここに \bar{F}_j は F_j の t に関するラプラス変換を表す。記号 R_ϵ は実数部分のみをとることを意味しており、 m は、 $j=1, 2$ のとき $m=1$ 、 $j=3$ のとき $m=0$ をとるものとする。

方程式 (1.11) の両辺を t に関してラプラス変換すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ c_1^2 \left(p^2 - \frac{1}{r^2} \right) - s^2 \right\} \left\{ c_2^2 \left(p^2 - \frac{1}{r^2} \right) - s^2 \right\} \bar{\phi}_j \\ &= -\frac{c_1^2 c_2^2}{1-\nu} \bar{F}_j, \quad (j=1, 2) \\ & (c_1^2 p^2 - s^2)(c_2^2 p^2 - s^2) \bar{\phi}_3 = -\frac{c_1^2 c_2^2}{1-\nu} \bar{F}_3 \quad \dots (3.3) \end{aligned}$$

となるから、式 (3.2) に注意すれば、方程式 (3.3) の特殊解 $\bar{\phi}_j$ として次式を求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_j &= -\frac{c_1^2 c_2^2}{2\pi(1-\nu)} R_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-\nu)} d\zeta \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r) d\alpha}{(\gamma_1^2 + s^2)(\gamma_2^2 + s^2)} \int_0^{\infty} \eta \bar{F}_j(\eta, \zeta, s) J_m(\alpha \eta) d\eta \quad \dots (3.4) \end{aligned}$$

ここに $\bar{\phi}_j$ は ϕ_j の t に関するラプラス変換、 γ_n は $\gamma_n^2 = c_n^2(\alpha^2 + \beta^2)$, ($n=1, 2$)、である。また初期条件として

次式を採用している。

$$\phi_j|_{t \rightarrow 0} = 0, \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} \phi_j|_{t \rightarrow 0} = 0 \quad (n=1, 2, 3) \quad \dots (3.5)$$

式(3.4)の ϕ_j を s に関してラプラス逆変換すれば動的物体力問題の応力関数 ϕ_j が得られて次式のようになる^{(3.24), (3.25)}。

$$\begin{aligned} \phi_j = & \frac{c_2^2}{\pi} R_e \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-t)} d\zeta \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} d\alpha \\ & \cdot \int_0^{\infty} \eta (F_{j1} - F_{j2}) J_m(\alpha \eta) d\eta \quad \dots (3.6) \end{aligned}$$

ここに F_{jn} は次式を表す。 $n=1, 2$ として

$$F_{jn}(\eta, \zeta, t) = \frac{1}{c_n} \int_0^t F_j(\eta, \zeta, \xi) \sin \gamma_n(t - \xi) d\xi \quad \dots (3.7)$$

3.2.3 素解による方法

ここでは、物体力問題の応力関数を求める素解の方法について述べる。ここに素解とは無限体領域に存在する物体力の問題の応力関数を求めるための一つのグリーン関数で、弾性論に素解を導入することは、古橋^(3.13)がフーリエ変換を用いて静的なときに直角座標で行っている。しかし古橋と同様な方法を円柱座標で行うことは容易でないと思われるから、ここでは方程式(1.11)から出発することにする。

関数 $F_j(r, z, t, \eta, \zeta, \xi)$ は方程式

$$\begin{aligned} & \left(\square_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\square_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Gamma_j \\ & = -\frac{1}{1-\nu} \frac{\delta(r-\eta) \delta(z-\zeta) \delta(t-\xi)}{2\pi r}, \quad \square_1^2 \square_2^2 \Gamma_j \\ & = -\frac{1}{1-\nu} \frac{\delta(r-\eta) \delta(z-\zeta) \delta(t-\xi)}{2\pi r} \quad \dots (3.8) \end{aligned}$$

の特殊解とする。ここに $\delta(\quad)$ はディラックのデルタ関数である*。もし Γ_j を求めることができれば、物体力問題の応力関数 ϕ_j は次式から求められる。

$$\phi_j = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta F_j(\eta, \zeta, \xi) \Gamma_j d\xi d\eta d\zeta \quad \dots (3.9)$$

以上の議論の妥当性を示すことは容易であり、ここでは省略する。デルタ関数の積分表示を用い^(3.27)、方程式(3.8)から Γ_j を求めれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_j = & -\frac{c_2^2 R_e}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-t)} d\beta \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r) J_m(\alpha \eta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} \\ & \cdot \left\{ \frac{\sin \gamma_1(t-\xi)}{c_1} - \frac{\sin \gamma_2(t-\xi)}{c_2} \right\} d\alpha, \quad (t > \xi) \\ & = 0, \quad (t < \xi) \quad \dots (3.10) \end{aligned}$$

この Γ_j を動的物体力問題の応力関数の素解と呼ぶ。以上の結果から式(3.6)の ϕ_j を導くことができる。

* 本論では F_j などを必要なだけ微分可能なクラスで考えてきた。 δ 関数は超関数でこの条件を満たさないが、特例として採用する。なお弾性論における超関数解について、古橋^(3.26)の研究がある。

3.3 静的物体力問題の応力関数

静的物体力問題の応力関数は非斉次偏微分方程式(1.13)の特殊解として定義される。前節3.2.3項と同様な考察を静的物体力 $F_j(r, z)$ に対して行えば、無限体領域に存在する任意分布の軸対称物体力問題の応力関数の素解として次式を求めることができる。

$$\begin{aligned} \Gamma_j = & -\frac{R_e}{4\pi^2(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-t)} d\beta \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r) J_m(\alpha \eta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha \quad \dots (3.11) \end{aligned}$$

したがって、応力関数 ϕ_j は次式のようになる^(3.28)。

$$\begin{aligned} \phi_j = & -\frac{R_e}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-t)} d\zeta \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha \int_0^{\infty} \rho F_j(\rho, \zeta) J_m(\alpha \rho) d\rho \quad \dots (3.12) \end{aligned}$$

なお、応力関数の式では積分が求まらないときでも、それから導かれた変位あるいは応力式^(3.29)では求まることが多い^(3.30)。

3.4 軸対称物体力の働く半無限体問題の解法

3.4.1 応力関数と境界条件

半無限体領域($0 \leq r < \infty, z \geq 0$)に任意分布の静的軸対称物体力が存在し、その境界面($z=0$)が自由表面である問題の一般法を示す。境界条件は次のようになる。(応力の記号は一般的慣例による)

$$\sigma_z|_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=0} = \tau_{\theta z}|_{z=0} = 0 \quad \dots (3.13)$$

ここでは、物体力問題の応力関数の式(3.12)から次式のものを採用する。

$$\phi_j = -\frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{F}_j \frac{\alpha J_m(\alpha r)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta z d\alpha d\beta \quad \dots (3.14)$$

ここに \bar{F}_j は次式を表す。

$$\bar{F}_j(\alpha, \beta) = \iint_Q r F_j(r, z) J_m(\alpha r) \cos \beta z dr dz \quad \dots (3.15)$$

ただし Q は物体力の存在する積分領域である。

ところで、式(3.14)の応力関数 ϕ_j は境界条件式(3.13)を一般には満足しない。そこで、式(4.14)の ϕ_j と重ね合わせると境界条件式(3.13)を満足するような応力関数が別に必要になる。この目的のための応力関数として、前章の式(2.5)、(2.8)から次式の形のものを採用する。

$$\begin{aligned} \phi_3 = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} J_0(\alpha r) (A + \alpha z B) e^{-\alpha z} d\alpha \\ \phi_2 = & \int_0^{\infty} \frac{1}{2\alpha} C r J_2(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha, \quad \phi_1 = 0 \quad \dots (3.16) \end{aligned}$$

ここに A, B, C は任意定数である。

以後の議論を容易にするため、式(3.16)の応力関数から、境界条件

$$\sigma_z|_{z=0}=P_3, \quad \tau_{z\theta}|_{z=0}=P_2, \quad \tau_{rz}|_{z=0}=P_1 \quad \dots(3.17)$$

を満足する解を求めておく。すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= -\int_0^\infty J_1(\alpha r) \{ \bar{P}_1 - (1-2\nu-\alpha z)(\bar{P}_3 - \bar{P}_1) \} e^{-\alpha z} d\alpha, \\ \mu u_2 &= -\int_0^\infty J_1(\alpha r) \bar{P}_2 e^{-\alpha z} d\alpha \\ 2\mu u_3 &= -\int_0^\infty J_0(\alpha r) [\bar{P}_1 + \{ 2(1-\nu) \\ &\quad + \alpha z \} (\bar{P}_3 - \bar{P}_1)] e^{-\alpha z} d\alpha \quad \dots(3.18) \end{aligned}$$

ここに \bar{P}_j は P_j のハンケル変換を表す。

3.4.2 半径方向に働く物体力

まずはじめに、半径(r)方向に働く物体力 $F_1(r, z)$ の場合を考える。式(3.14)において $j=1, m=1$ として応力式を求め、式(3.18)から求めた応力式と重ね合わせる。そして境界条件式(3.13)を満足するように \bar{P}_j の値を定める。しかして次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{P}_3 &= -\frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \alpha \bar{F}_1 \left\{ \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{1-\nu}{\alpha^2+\beta^2} \right\} d\beta, \\ \bar{P}_1 &= \bar{P}_2 = 0 \quad \dots(3.19) \end{aligned}$$

これより、境界条件式(3.13)を満足し物体力 F_1 をもつ半無限体の変位 u_j は次式のように表せることになる(3.31), (3.32)。 $u_2=0$,

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= \frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \bar{F}_1 \\ &\quad \cdot \left\{ \left[\frac{2(1-\nu)}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] \cos \beta z + (1-2\nu-\alpha z) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ \frac{1-\nu}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right\} e^{-\alpha z} \right\} J_1(\alpha r) d\alpha d\beta \\ 2\mu u_3 &= -\frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \bar{F}_1 \\ &\quad \cdot \left\{ \left[\frac{\alpha\beta \sin \beta z}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \{ 2(1-\nu) + \alpha z \} \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. \left\{ \frac{1-\nu}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right\} e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r) d\alpha d\beta \right. \\ &\quad \left. \dots(3.20) \right. \end{aligned}$$

3.4.3 ねじり力として働く物体力

ここでは、 z 軸まわりのねじり力として働く物体力 $F_2(r, z)$ が半無限体領域に存在する場合を考える。式(3.14)において $j=2, m=1$ とし、それを式(1.14)に代入すれば次式を得る。

$$2\mu u_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \bar{F}_2 \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha^2+\beta^2} \cos \beta z d\alpha d\beta, \quad u_1=u_3=0 \quad \dots(3.21)$$

この解は境界条件式(3.13)を満足している。

3.4.4 z 軸方向に働く物体力

z 軸方向に働く物体力 $F_3(r, z)$ が半無限体領域に存在する場合を考える。式(3.14)において $j=3, m=0$ とし、本節 3.4.2 項と同様な考察を行えば、境界条件式(3.13)を満足する解として次式を導くことができる。

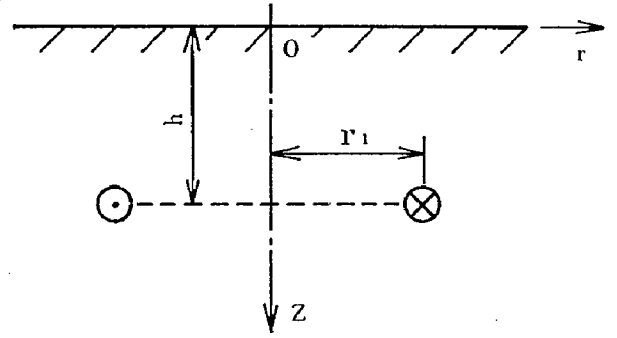


図 3.1 ある円周上にねじり物体力を受ける半無限体

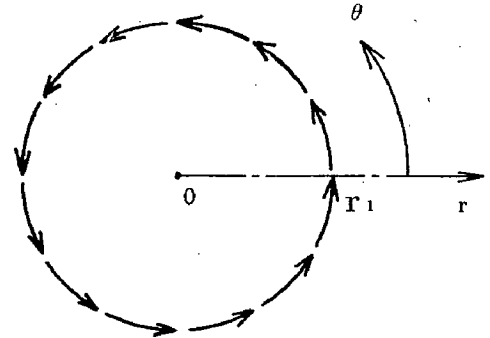


図 3.2 ある円周上のねじり力

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= \frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \bar{F}_3 \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\alpha\beta \sin \beta z}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \{ 2(1-\nu) - \alpha z \} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ \frac{1-\nu}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right\} e^{-\alpha z} \right\} J_1(\alpha r) d\alpha d\beta \\ 2\mu u_3 &= \frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \bar{F}_3 \\ &\quad \cdot \left\{ \left[\frac{2(1-\nu)}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] \cos \beta z - (1-2\nu+\alpha z) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ \frac{1-\nu}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right\} e^{-\alpha z} \right\} J_0(\alpha r) d\alpha d\beta \quad \dots(3.22) \end{aligned}$$

以上の結果はすべて境界で表面力が零の場合であるが、同様にして境界面が剛体に固定されている場合の結果も導くことができる(3.31), (3.32)。

3.4.5 計算例

本節の結果の一つの計算例を示す。自由表面をもつ半無限体領域において、図 3.1 に示すように深さ $z=h$ 、半径 $r=r_1$ の円周上に図 3.2 のような z 軸まわりのねじり力

$$F_2(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-r_1) \delta(z-h) \quad \dots(3.23)$$

が作用するものとする。この F_2 を式(3.15)に代入すれば

$$\bar{F}_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} J_1(\alpha r_1) \cos \beta h \quad \dots(3.24)$$

となるから、これと式(3.21)から次式が得られる^{(3.31)~(3.33)}。

$$2\mu u_2 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{rr_1}} \left\{ Q_{1/2} \left(\frac{r^2 + r_1^2 + (z-h)^2}{2rr_1} \right) + Q_{1/2} \left(\frac{r^2 + r_1^2 + (z+h)^2}{2rr_1} \right) \right\}, \quad u_1 = u_3 = 0 \quad \dots(3.25)$$

ここに $Q_{1/2}(\quad)$ は第2種ルジャンドル関数を表す^(3.34)。

3.5 物体力問題の応力関数と熱弾性ポテンシャルの関係

弾性体の温度分布が一様でないときには、外力が作用していなくても弾性体に応力（熱応力）が生ずる。このような熱応力問題に対し、1個のスカラー・ポテンシャルを導入した解法が Goodier^(3.22) によって示されている。ところで、熱弾性問題は一つの物体力問題とみなすことができるので^(3.35)、ここでは、物体力問題の応力関数と Goodier の熱弾性ポテンシャルとの関係を考察する。

弾性体が温度分布 $T(r, z)$ の状態にあるとき、 T によって生ずる弾性体の変位 u_j は方程式

$$\nabla^2 \phi = \frac{2\mu(1+\nu)\gamma}{1-\nu} T \quad \dots(3.26)$$

を満足する Goodier の熱弾性ポテンシャル $\phi(r, z)$ により次式で表される。

$$2\mu u_j = \text{grad}_j \phi \quad \dots(3.27)$$

ここに γ は物体の温度に対する線膨張係数である。

ところで、温度分布 T が与えられたとき、これを物体力 F_j が与えられたものとみなすと、 F_j は

$$F_j = -\frac{2\mu(1+\nu)\gamma}{1-\nu} \text{grad}_j T \quad \dots(3.28)$$

で表される^(3.35)。したがって、この F_j を式(1.13)の右辺に代入すれば

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi_j = \frac{2\mu(1+\nu)\gamma}{(1-\nu)(1-2\nu)} \text{grad}_j T \quad (j=1, 2)$$

$$\nabla^4 \phi_3 = \frac{2\mu(1+\nu)\gamma}{(1-\nu)(1-2\nu)} \text{grad}_3 T \quad (j=3) \quad \dots(3.29)$$

となるから、熱弾性問題の解 u_j は、方程式(3.29)を満足する応力関数 ϕ_j により式(1.14)からも求められることになる。

温度分布 T の与えられた問題に対し形式的に物体力問題の解法を適用した上述の結果は、Goodier の熱弾性ポテンシャルによる解法に比べて、はるかに不便な形になっている。したがって、式(3.29)で表された応力関数を用いる解法はもっと単純な形に表現できることが予測される。

式(3.29)の両辺に div をほどこせば次式が得られる。

$$\nabla^2 \left\{ \nabla^2 \text{div} \phi - \frac{2\mu(1+\nu)\gamma}{(1-\nu)(1-2\nu)} T \right\} = 0 \quad \dots(3.30)$$

熱弾性問題の応力関数 ϕ_j は温度分布 T に対する特殊解であるので、方程式(3.30)の解のうちから次式を満足するものをとればよい。

$$\nabla^2 \text{div} \phi = \frac{2\mu(1+\nu)\gamma}{(1-\nu)(1-2\nu)} T \quad \dots(3.31)$$

ここで ϕ_j の代りにスカラー・ポテンシャル A を導入して

$$\phi_j = \text{grad}_j A \quad \dots(3.32)$$

とおくことにすれば、熱弾性問題の解 u_j は、方程式

$$\nabla^4 A = \frac{\gamma E T}{(1-\nu)(1-2\nu)} \quad \dots(3.33)$$

を満足する A により次式で表されることになる。

$$2\mu u_j = (1-2\nu) \text{grad}_j \nabla^2 A \quad \dots(3.34)$$

式(3.33)、(3.34)において $\nabla^2 A = \phi$ とおけば、前述の Goodier の公式となる。

3.6 初期値問題の応力関数

本節では、弾性論における初期値問題の応力関数を示す。ここにいう初期値問題とは、ある定まった時間 $t=t_0$ 、たとえば $t_0=0$ において弾性体領域全体あるいはその一部がある変形または運動（速度分布）の存在する状態におかれていたとき、その弾性体が $t>t_0$ においてどのような状態に変化するかを考察する問題をいう。

この問題は、西村^(3.37)が有限円筒体の振動応力問題の取り扱いで行っているように、弾性基礎方程式からとりあえず必要な解を取り出して論じたり、また自由振動の問題として取り扱う場合もあるが、一般的には、弾性体領域内に伝ばする波動および境界でのその反射の問題として考察されるものである。このことは妹沢^(3.38)も述べているように、物理的にはむしろ波動の問題がさきにある。この波動の境界での反射が振動現象を表すといった方が適当であろう。すなわち、ある時間 $t=t_0$ において弾性体のある部分に衝撃力が作用したものとすれば、弾性体はそのとき、領域全体から抵抗力を発生するのではなく、衝撃力の作用した近傍においてのみ衝撃力に抵抗する応力が生じ、この応力が応力波となって弾性体領域全体に伝ばしてゆくのである^(3.23)。

上述のような理由により、弾性論では衝撃問題と初期値問題を区別しないで論ずる場合も多いのであるが、ここでは衝撃問題は除外して、初期値問題のみを考察する。

時間 $t \rightarrow +0$ における弾性体の変位成分を $f_j(r, z)$ 、弾性体の粒子速度成分を $g_j(r, z)$ とする。このとき、弾性体の初期条件は次式で表される。

$$u_j|_{t \rightarrow +0} = f_j(r, z), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_j|_{t \rightarrow +0} = g_j(r, z) \quad \dots(3.35)$$

ただし f_j, g_j は弾性基礎方程式およびデリクレの条件

ならびに式(3.1)の右辺と同じ条件を満足するものとする。このとき f_j, g_j を次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} f_j \\ g_j \end{matrix} \right\} &= \frac{R_e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-t)} d\zeta \int_0^{\infty} \alpha J_m(\alpha r) d\alpha \\ &\cdot \int_0^{\infty} \eta \left\{ \begin{matrix} f_j \\ g_j \end{matrix} \right\} J_m(\alpha \eta) d\eta \quad \dots(3.36) \end{aligned}$$

初期値問題の応力関数を定義し、それを求める。初期値問題の応力関数 $\phi_j(r, z, t)$ は、非斉次偏微分方程式

$$\begin{aligned} &\left\{ c_1^2 \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) - s^2 \right\} \left\{ c_2^2 \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) - s^2 \right\} \bar{\phi}_j \\ &= -\frac{c_1^2 c_2^2}{1-\nu} \rho (sf_j + g_j), \quad (j=1, 2), \quad (c_1^2 \nabla^2 - s^2) \\ &\cdot (c_2^2 \nabla^2 - s^2) \bar{\phi}_3 = -\frac{c_1^2 c_2^2}{1-\nu} \rho (sf_3 + g_3) \quad \dots(3.37) \end{aligned}$$

の特殊解 $\bar{\phi}_j(r, z, s)$ を s に関してラプラス逆変換したものとす。この ϕ_j により初期値問題の解 u_j は、式(1.12)から求められる。

方程式(3.37)は、初期条件式(3.35)のもとに弾性基礎方程式(1.1)を t に関してラプラス変換し、第1章の1.2節と同様な考察をくり返せば容易に導くことができる。ただし F_j は零としている。式(3.36)を用いて方程式(3.37)の特殊解 $\bar{\phi}_j$ を求め、それをラプラス逆変換すれば次式が得られる^(3.41)。

(i) 初期変位 f_j の応力関数 ϕ_j ;

$$\begin{aligned} \phi_j &= \frac{\rho c_2^2}{\pi} R_e \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(z-t)} d\zeta \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r)}{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \gamma_1 t - \cos \gamma_2 t) d\alpha \\ &\cdot \int_0^{\infty} \eta f_j(\eta, \zeta) J_m(\alpha \eta) d\eta \quad \dots(3.33) \end{aligned}$$

(ii) 初期速度 g_j の応力関数 ϕ_j ;

$$\begin{aligned} \phi_j &= \frac{\rho c_2^2}{\pi} R_e \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(z-t)} d\zeta \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_m(\alpha r)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} \left(\frac{\sin \gamma_1 t}{c_1} - \frac{\sin \gamma_2 t}{c_2} \right) d\alpha \\ &\cdot \int_0^{\infty} \eta g_j(\eta, \zeta) J_m(\alpha \eta) d\eta \quad \dots(3.39) \end{aligned}$$

ここに γ_n は式(3.4)のそれと同じである。

3.7 結 言

本章では、物体力の働く弾性問題の応力関数による解法を提示考察した。おもな結果を要約すると次のようになる。

(1) 円柱座標で表された弾性体領域において軸対称な任意分布の動的あるいは静的物体力が存在する問題に対し、応力関係による解法を示した。

(2) ねじり力も含む任意分布の静的軸対称物体力が半無限体領域に存在するとき、境界で表面力が零として、一般解法を示した。

(3) 物体力問題の応力関数と熱応力問題の熱弾性ポテ

ンシャルの関係を考察し、熱弾性ポテンシャルは物体力問題の応力関数の特別な場合のものであることを示した。

(4) 初期値問題に対し応力関数による解法を示した。

(5) 計算例として、半無限体領域内のある円周上にねじり力として働く物体力が存在する問題の解(グリーン関数)を示した。この解は第6章で応用される。

(6) 本章の結果の応用例は第5章と第6章に示されるが、それとは別に次の問題もすでに考察されている。(i) ねじり力を受ける無限厚板問題の物体力の分布による解法^(3.42), (ii) ねじり力として働く物体力を受ける無限厚板^(3.43)およびこの問題のグリーン関数^(3.44), (iii) 貫通しない円孔面に等分布ねじり力を受ける半無限体問題の近似解^(3.45), (iv) 円形あるいは円環状剛体スタンプでねじりを受ける無限厚板^(3.45), ^(3.46)および半無限体^(3.47), (v) 軸対称剛体チャックでねじりを受ける円柱^(3.20), (vi) 円環状剛体スタンプでねじりを受ける円柱および円板^(3.21)。

(7) 物体力問題の解法を応用して固有ひずみ問題などを取り扱うことも考えられるが^(3.45)、この種の問題は本論文の対象から除外した。

第4章 軸対称集中力問題の考察

4.1 緒 言

弾性論における集中力の概念は、ある領域に分布した物体力の1点への極限移行として Kelvin^(4.1)によって導入された。こうして得られた Kelvin の解は数学的な1点に集中力が作用するとしてディラックのデルタ関数を用いたときの結果と一致する^(4.2)。また、弾性論における解はいずれかの点で発散することが古橋^(4.3)によって示されているが、考察領域内あるいは考察領域の近傍で発散する解は特異性をもつ解と呼ばれ、特異性をもつ解に集中力としての解釈を与えることもなされている^(4.4)。以上のように弾性論における集中力の概念はいくつかの意味をもっており、Sternberg^{(4.5)~(4.7)}らはこのあいまい性を特異性のオーダーの見地から考察している。

弾性体領域内の1点に集中力の働く問題の解は、前章の3.1節でも述べたように、近年いろいろと応用されてきている^{(4.8)~(4.11)}。それらの研究では、無限体内の1点に単一集中力が働くときの Kelvin の解、半無限体表面の1点において表面に垂直に単一集中力が働くときの Boussinesq の解、表面において表面に平行な単一集中力が働くときの Cerruti の解、半無限体領域内の1点において表面に垂直あるいは平行に単一集中力が働くときの Mindlin の解がおもに適用されているが、流体力学における吹き出しなどに相当する解も弾性論に存在することが知られており^{(4.12), (4.13)}、上述の Mindlin の解は^(4.14),

これらの解を重ね合わせて得られたものである。

本章では、任意形状あるいは任意の境界条件をもつ三次元弾性体を無限体から切り出すことを可能にするための第1歩として、第1章の1.3節に示された静的弾性問題の応力関数から特異性をもつ応力関数を求め、集中力としての意味とその応用性について考察する。応力関数によって弾性問題を考察するとき、応力関数を変数分離した形で表すことが多いが、それとは別に、応力関数を多項式の形で表す方法もあり、この方法を適用したものに Timpe の円板の曲げ問題の研究^(4.16)、その他^(4.17)がある。本章では応力関数を多項式の形で表す方法を採用する。

4.2 特異性をもつ応力関数

考察領域内で特異性をもつ解を求めるには、それに対応する応力関数を求めればよい。それには、(i)方程式(1.13)の物体力 F_j に集中力を与え、その特殊解として応力関数を求める方法と、(ii)物体力 F_j は零とおき、方程式

$$\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2 \phi_j = 0, \quad (j=1, 2), \quad r^4 \phi_3 = 0 \quad \dots(4.1)$$

から特異性をもつ応力関数を求める方法が考えられる。(i)の方法は第3章で示された解法を用いればよいが、既知の積分公式は限られているため^(4.17)、数値積分を必要とする場合が多いようである。そこで本章では上述(ii)の方法を採用する。この考察方法は Love の応力関数 χ すなわち ϕ_3 に対してはすでに適用されているので^(4.1)、ここでは ϕ_1 を考察する。

方程式(4.1)の第1式において $j=1$ とし、いま

$$\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right) \phi_1 = \Phi(r, z) \quad \dots(4.2)$$

とおけば次式が得られる。

$$\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right) \Phi = 0 \quad \dots(4.3)$$

よってまずはじめに方程式(4.3)から Φ を求め、それを方程式(4.2)に代入して ϕ_1 を求める。球座標 (R, θ, α) を導入して

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad \cos \alpha = z/R, \quad \sin \alpha = r/R, \quad \theta = \theta \quad \dots(4.4)$$

の関係をを用いれば、式(4.3)を次式のように変形できる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \alpha}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2 \sin^2 \alpha} \right) \Phi = 0. \quad \dots(4.5)$$

方程式(4.5)に変数分離法を適用すれば次式が得られる。

$$\Phi = R^n \Gamma(\alpha), \quad \text{および} \quad \Phi = R^{-(n+1)} \Gamma(\alpha) \quad \dots(4.6)$$

ここに

$$\Gamma = c_1 P_n^1(x) + c_2 Q_n^1(x) \quad \dots(4.7)$$

である。ただし $x = \cos \alpha$, c_1 と c_2 は任意定数, $P_n^1(x)$,

$Q_n^1(x)$ は第1種および第2種ルジャンドル陪関数を、また $n=0, 1, 2, \dots$ を表す。

以上の結果を用いれば、考察領域内(座標原点近傍)で特異性をもつ応力関数 ϕ_1 として次式を導くことができる^{(4.18), (4.19)}。

$$\phi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (\phi_{1i} + \phi_{2i} + \phi_{3i} + \phi_{4i} + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8 + \phi_9) \quad \dots(4.8)$$

ここに ϕ は次式を表す。

$$\begin{aligned} \phi_{1i} &= c_{1i} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \left(-\frac{R}{r} \right), & \phi_5 &= c_5 \frac{rz}{2} \log r \\ \phi_{2i} &= c_{2i} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \left(-\frac{r}{R} \right), & \phi_6 &= \frac{c_6}{6} \frac{z^3}{r} \\ \phi_{3i} &= c_{3i} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \left(-\frac{r}{R^3} \right), & \phi_7 &= c_7 r \log \frac{R+z}{R-z} \\ \phi_{4i} &= c_{4i} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \left(\frac{R^3}{r} \right), & \phi_8 &= c_8 \frac{R^2}{r} \\ \phi_9 &= c_9 \left\{ \frac{3rz}{2} \log \frac{R+z}{R-z} + \frac{Rz^2}{r} - 2Rr \right\} \end{aligned} \quad \dots(4.9)$$

ただし c は任意定数である。

4.3 特異性をもつ解

弾性問題解法の基本原理の一つは解の重ね合わせにあるといえる。特異性をもつ解を分布させて境界条件を満足させる、いわゆる特異点配置法^{(4.9), (4.10)}にもってゆく準備として、前節の式(4.8)に示された特異性をもつ応力関数を考察し、集中力としての意味を明らかにする。これらの解を境界値問題に應用するときには、特異性をもつ領域を切り取って考えることになる。

(1) 吹き出し力 式(4.8)の応力関数 ϕ_{1i} において $i=0$ とし、式(1.14)に代入すれば次式が得られる。

$$2\mu u_1 = c_{10} \frac{r}{R^3}, \quad u_2 = 0, \quad 2\mu u_3 = c_{10} \frac{z}{R^3} \quad \dots(4.10)$$

これは球か(筒)に等分布内圧を受ける無限体問題の解としてすでに知られているものである。この解は座標原点で $O(R^{-2})$ のオーダーの特異性を持ち、座標原点に三次元放射状の物体力が働いているときの変位と解釈できるので、この解を弾性論における吹き出し力の解と呼ぶことにする。

(2) 半径(r)方向放射状力 式(4.8)の応力関数 ϕ_{2i} において $i=0$ とすれば次式の変位が得られる。

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= c_{20} \frac{r}{R^3} \left(4\nu - \frac{3r^2}{R^2} \right), & u_2 &= 0 \\ 2\mu u_3 &= c_{20} \frac{z}{R^3} \left(2 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad \dots(4.11)$$

これは図4.1に示すような半径(r)方向放射状力が座標原点に作用した無限体問題の解を表している^(4.20)。

(3) 二重力 前述の二つの応力関数 ϕ_{10} と ϕ_{20} を重ね

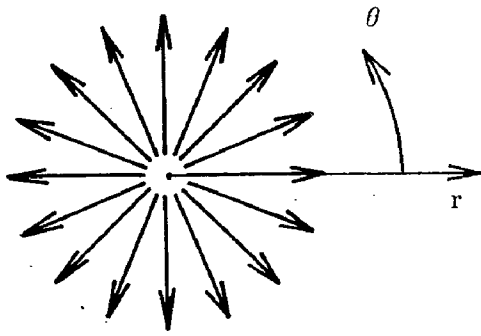


図 4.1 半径方向放射状力

合わせ, その任意定数の値を $c_{10}=2(1-2\nu)c_{20}$ とすれば, 大きさが等しく向きが反対の二つの単一集中力いわゆる二重力が座標原点において z 軸方向に作用したときの無限体問題の解が得られる。

(4) 二重吹き出し力 式(4.8)の応力関数 ϕ_{1i} において $i=1$ とすれば次式の変位が得られる。

$$\begin{aligned}
 2\mu u_1 &= -c_{11} \frac{3rz}{R^3}, \quad u_2 = 0 \\
 2\mu u_3 &= c_{11} \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) \quad \dots(4.12)
 \end{aligned}$$

これは流体力学における二重吹き出しに相当する解で, 座標原点において $O(R^{-3})$ のオーダーの特異性をもっている。このことに関しては次節で述べる。

(5) 有限直線上に物体力が等分布する問題の解 式(4.8)の応力関数 ϕ_{1i} において $i=1$ とし, それに ϕ_7, ϕ_8 を重ね合わせれば, 次式の変位が得られる^(4.21)。 $u_2=0$,

$$\begin{aligned}
 2\mu u_1 &= \frac{f_0(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left(\frac{z+h}{R_2} - \frac{z-h}{R_1} \right), \\
 2\mu u_3 &= \frac{f_0(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad \dots(4.13)
 \end{aligned}$$

これは z 軸上 $z=-h$ から $z=+h$ まで長さ $2h$ にわたって吹き出し力が等分布する無限体問題の解を表している。ただし R_1, R_2 は次式を表す。

$$R_1^2 = r^2 + (z-h)^2, \quad R_2^2 = r^2 + (z+h)^2$$

同様にして, 長さ $2h$ にわたって図4.1の半径(r)方向放射状力が等分布するときの変位として次式を導くことができる^(4.21)。 $u_2=0$,

$$\begin{aligned}
 2\mu u_1 &= \frac{f_0}{16\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r} \left(\frac{h+z}{R_2} + \frac{h-z}{R_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + r \left(\frac{h+z}{R_2^3} + \frac{h-z}{R_1^3} \right) \right\}, \\
 2\mu u_3 &= \frac{f_0}{16\pi(1-\nu)} \left\{ 2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - r^2 \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) \right\} \quad \dots(4.14)
 \end{aligned}$$

この式は式(4.8)の応力関数 ϕ_7 と ϕ_8 から求められる。

式(4.13)と(4.14)から次のことがわかる^(4.21)。「吹き

出し力の有限直線上の等分布」=「半径(r)方向放射状力の有限直線上の等分布」+「有限直線の線端における2個の単一集中力」。

(6) 同様にして特異性をもつ多くの解を導くことができるが^{(4.18), (4.19)}, ここでは省略する。

4.4 荷重点の特異性のオーダーの物理的意味

本章の4.2節で特異性をもつ無限個の応力関数したがって無限個の特異性をもつ解が示され, そして3.4節では, $i=0, 1$ の場合について, いくつかその物理的意味を述べた。ここでは残る無限個の特異性をもつ解に関する物理的意味を考察する。

弾性体の1点に集中力が働くとき, 半径(r)方向放射状力や吹き出し力のようにその荷重自身はつり合い状態にある場合には, それによって生じた変位は荷重点で, R を荷重点からの距離とすると, $O(R^{-2})$ のオーダーの特異性をもち, そして Kelvin の単一集中力のようにその荷重自身はつり合い状態にない場合には, 荷重点で $O(R^{-1})$ のオーダーの特異性をもつことが Sternberg^{(4.5)~(4.7)}らによって示されている。しかし, その他のオーダーの特異性をもつ解に対しては, それが物理的に何を表すのか明らかではないようである。

ところで4.2節の特異性をもつ応力関係を見ると, 4.3節で考察した $i=0$ あるいは $i=1$ のときの応力関数を z に関して次々と微分した形になっている。したがって, 4.3節で考察された特異性をもつ解を z に関して次々と微分することにより特異性をもつ無限個の解が得られる。そしてそれらの解の特異性のオーダーは, 微分するたびに大きくなってゆく。たとえば, $O(R^{-2})$ のオーダーの特異性をもつ吹き出し力の解に対して, これを z で1回微分すると

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\text{吹き出し力の解}) = \text{二重吹き出し力の解}$$

となって, $O(R^{-3})$ のオーダーの特異性をもつ二重吹き出し力の解が得られる。以上のことは, 物理的には次のことを表している。 z 軸上 $z=+h$ に吹き出し力を, $z=-h$ に吸い込み力(マイナスの吹き出し力)を置き, これらの解を重ね合わせて $h \rightarrow 0$ の極限をとると二重吹き出し力の解が得られる。

上述の議論は, 吹き出し力以外の解に対しても同様に行うことができる。すなわち $i=i'+1$ のときの解は, $i=i'$ のときの解の座標原点を z 軸上において $z=+h$ および $z=-h$ に移動させ, この二つの解を重ね合わせて $h \rightarrow 0$ の極限をとったときの解になっている。以上のことから, Sternberg らの述べた結果を拡張することができて, $O(R^{-1})$ と $O(R^{-2})$ 以外の特異性をもつ解を説明できることがわかる。

4.5 結 言

本章のおもな結果を要約すると次のようになる。

(1) 特異性をもつ無限個の応力関数, したがって, 特異性をもつ無限個の解を示し, 集中力としての意味を考察した。

(2) 荷重点での特異性のオーダーが $O(R^{-1})$ および $O(R^{-2})$ 以外の解 (変位) の物理的意味はこれまではっきりしていなかったが, それらの解に説明を与えることのできる道を開いた。

(3) 有限直線上に吹き出し力および半径 (r) 方向放射状力が等分布する問題の解を示し, Kelvin の解との関係も述べた。

第5章 応力関数による解法の応用 (解析的方法)

5.1 緒 言

これまでの章では軸対称弾性問題を応力関数によって解決する方法を提示考察することに重点をおいて述べてきたが, 本章と次章では, これまでの章の結果を応用して, 具体的な形をもつ弾性体の問題をいくつか取り扱う。そのため, 本章では解析的方法を, 次章では数値解法を用いる。

本章では, (i) 第2章の結果を応用して「有限厚肉円筒が内圧を受けてテーパ状に押し広げられる問題」, (ii) 第4章の結果を応用して「2本の剛体テーパ棒の差し込みを受ける中空厚肉球の問題」, (iii) 第3章の結果を応用して「半球ピットにねじりを受ける無限厚板の問題」を考察する。上記(iii)の問題に対しては, 特異性をもつねじり物体力を無限体領域内にとられた直線上に等間隔に無限個分布させ, 荷重 (物体力) の対称性に注目して無限厚板領域を切り出すという方法を採用する。この方法はさらに一般化されて, ねじり力を受ける無限厚板問題^(5.4) およびねじり物体力を受ける無限厚板問題のグリーン関数を求める問題にも応用されている^(5.4)。

5.2 内圧でテーパ状に押し広げられる有限厚肉円筒

内半径 r_1 , 外半径 r_2 , 高さ h の有限厚肉円筒が z 軸方向 (円筒軸方向) に変化する内圧を受けて, その円筒内壁 ($r=r_1$) がテーパ状に変形したものとす。このとき円筒の半径方向変位 $u_1(r, z)$ は, $r=r_1$ において

$$u_1|_{r=r_1} = z \cdot \tan \alpha + \beta \quad \dots(5.1)$$

の値をとることになる。ここに 2α はテーパ角, β は円筒内壁の z 方向に変化しない変位である。

この問題の解は, 変位の境界条件式 (5.1) に加えて, 次式の応力の境界条件も満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=r_1} &= 0, \quad \sigma_z|_{z=0, h} = 0, \\ \tau_{rz}|_{r=r_1, r_2} &= 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0, h} = 0. \end{aligned} \quad \dots(5.2)$$

したがって本問題は, 境界条件式 (5.1) と (5.2) を満足す

る応力関数を見つける問題になる。この目的のため, 第2章で示された式 (2.5), (2.8) の応力関数から次式の形のものを採用する。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{C_1}{8} r^3 z + \frac{r}{4} \left\{ \frac{C_2}{2} r^2 + 2C_3 \log r \right\} \\ &\quad + \frac{z^3}{6} (C_4 r + C_5 r^{-1}) + \frac{C_6}{2} r z^2, \\ \phi_3 &= \frac{r^2}{4} \{ C_7 (\log r - 1) + C_8 \}. \end{aligned} \quad \dots(5.3)$$

ここに C は任意定数で, 式 (2.3) から得られる変位および応力が境界条件式 (5.1), (5.2) を満足するように定められれば次のようになる。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\mu(1-\nu)\tan \alpha r_1}{D}, \quad C_2 = \frac{2\mu(1-\nu)\beta r_1}{D}, \\ C_3 &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{2\mu\beta r_1 r_2^2}{D}, \quad C_4 = \frac{2\mu\nu \tan \alpha r_1}{D}, \\ C_5 &= -C_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\mu \tan \alpha r_1 r_2^2}{D}, \quad C_6 = \frac{2\mu\nu\beta r_1}{D}, \\ C_7 &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\mu r_1 r_2^2}{D} \log r_1 + \frac{(1-\nu)\mu r_1^3}{D} \end{aligned} \quad \dots(5.4)$$

ただし $D = (1-\nu)r_1^2 + (1+\nu)r_2^2$ である。

以上の結果により, 内圧を受けてテーパ状に押し広げられた有限厚肉円筒の変位は次式のように表される^(5.1)。

$$u_1 = \frac{1}{D} \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_2^2 \} \frac{r_1}{r} (\tan \alpha \cdot z + \beta),$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{r_1}{D} \left\{ \left\{ -\frac{1-\nu}{2} (r^2 - r_1^2) + \nu z^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1+\nu)r_2^2 \log \frac{r}{r_1} \right\} \tan \alpha + 2\nu\beta z \right\}, \end{aligned} \quad \dots(5.5)$$

5.3 剛体テーパ棒の差し込みを受ける中空厚肉球

本節では第4章に示された特異性をもつ応力関数を応用して, 図5.1に示すように, 2本の剛体テーパ棒の差し込みを受ける中空厚肉球の変位と応力を求める。そのため, 式 (4.8) に示された応力関数から ϕ_3 を採用する。この応力関数から変位と応力を求めると次式のようになる^(5.7)。

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= c_9 \frac{6R}{r}, \quad 2\mu u_3 = -3c_9 \log \frac{R+z}{R-z} \\ \sigma_r &= -c_9 \frac{6z^2}{Rr^2}, \quad \sigma_\theta = c_9 \frac{6R}{r^2} \\ \sigma_z &= -c_9 \frac{6}{R}, \quad \tau_{rz} = c_9 \frac{6z}{Rr} \\ u_2 &= \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \end{aligned} \quad \dots(5.6)$$

この解は z 軸上に特異性をもっているため, 特異性をもっている z 軸まわりのテーパ領域を切り取る。そのため, 式 (5.6) を球座標 (R, θ, α) に変換する。しかして次式を得る。

$$\begin{aligned} 2\mu u_R &= 3c_9 \left(2 - \cos \alpha \log \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \\ 2\mu u_\alpha &= 3c_9 \left(\cot \alpha + \sin \alpha \log \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

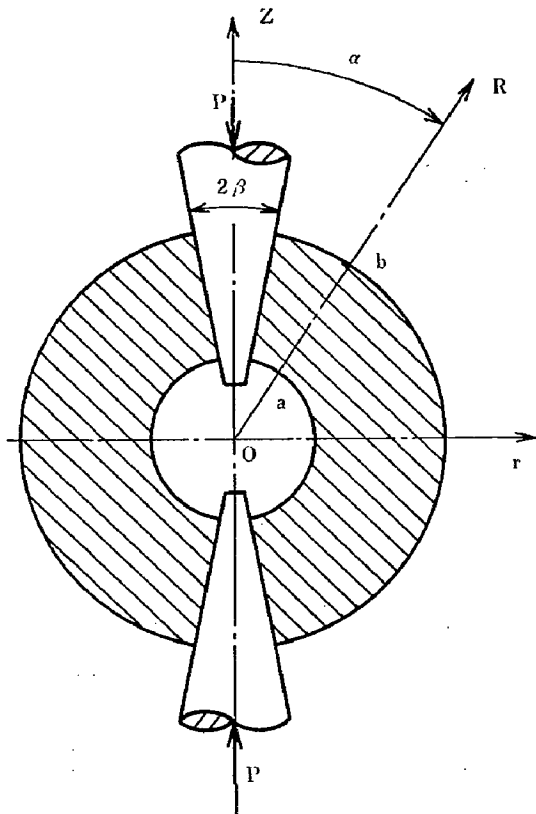
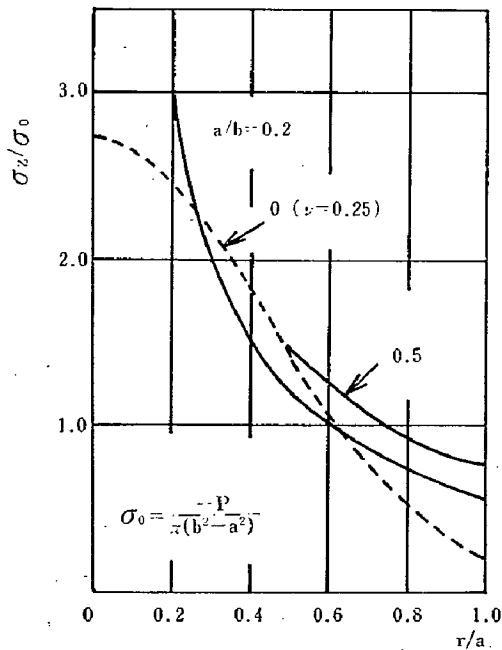


図 5.1 剛体テーパ棒の差し込みを受ける中空球


 図 5.2 応力 $\sigma_z|_{z=0}$ の分布

$$u_\theta = 0, \quad \sigma_R = \tau_{R\alpha} = \tau_{R\theta} = \tau_{\alpha\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = -\sigma_\alpha = 6c_0 \frac{1}{R \sin^2 \alpha} \quad \dots(5.7)$$

式(5.7)は図5.1に示した剛体テーパ棒の差し込みを受ける中空厚肉球の境界条件

$$\alpha = \beta; \quad u_\alpha = \text{const.},$$

$$R = a, b; \quad \sigma_R = \tau_{R\alpha} = \tau_{R\theta} = 0 \quad \dots(5.8)$$

を満足する。ここに 2β はテーパ角, a, b は厚肉球の内半径と外半径である。

図5.2は球の $z=0$ の面の応力 σ_z の分布を図示したもので、球の厚さが厚くなる程すなわち $a/b \rightarrow 0$ のとき、 σ_z の分布の不均一さは大きくなっている。図中の点線は表面に対向集中力を受ける中実球問題に対する Sternberg ら^(5.2)の結果である。なお、笠野ら^(5.3)は対向集中荷重を受ける中空球を解析しているが、その結果と図5.2の実線はきわめてよく似た応力分布になっている。

5.3 半球ピットにねじりを受ける無限厚板

表面に半径 R_1 および R_2 の2個の半球ピットをもつ無限厚板に図5.3のように円柱座標 (r, θ, z) と球座標 (R, θ, ϕ) をとり、その半球ピット面 ($R=R_1$ および $R=R_2$) に z 軸まわりの軸対称ねじり力 $T_1(\phi)$ および $T_2(\phi)$ が作用するものとする。この問題の境界条件は次式のように表される。

$$z = \pm b; \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = 0,$$

$$R = R_1; \quad \tau_{R\theta} = T_1(\phi), \quad \sigma_R = \tau_{R\phi} = 0,$$

$$R = R_2; \quad \tau_{R\theta} = T_2(\phi), \quad \sigma_R = \tau_{R\phi} = 0 \quad \dots(5.9)$$

この境界条件を満足する解を求めるため、図5.4に示すように、無限体領域内の z 軸上において、大きさが f_1 および f_2 の集中ねじり力(特異性をもつねじり物体力)を交互にそれぞれ等距離 $2b$ 隔てて無限個配置する。するとこのとき、図5.4の AA' 面 ($0 \leq r < \infty, z = +b$)、 BB' 面 ($0 \leq r < \infty, z = -b$) などは作用するねじり物体力に対して対称面となるから、荷重点を除いて応力は零となる。したがって、図5.4の無限体領域から AA' 面と BB' 面で囲まれた厚さ $2b$ の無限厚板領域 ($0 \leq r < \infty, |z| \leq b$) を仮想的に切り出せば、この領域は境界条件式(5.9)の $z = \pm b$ の面の条件を荷重点を除いて満足する^(5.4)。よって次に、この無限厚板から荷重点($r=0, z=+b$) および ($r=0, z=-b$) まわりに半径 $R=R_1$ および $R=R_2$ の半球領域を切り取れば、図5.3に示した2個の

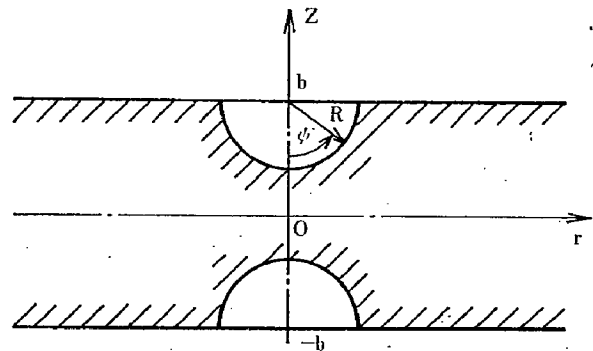


図 5.3 半球ピットにねじり力を受ける無限厚板

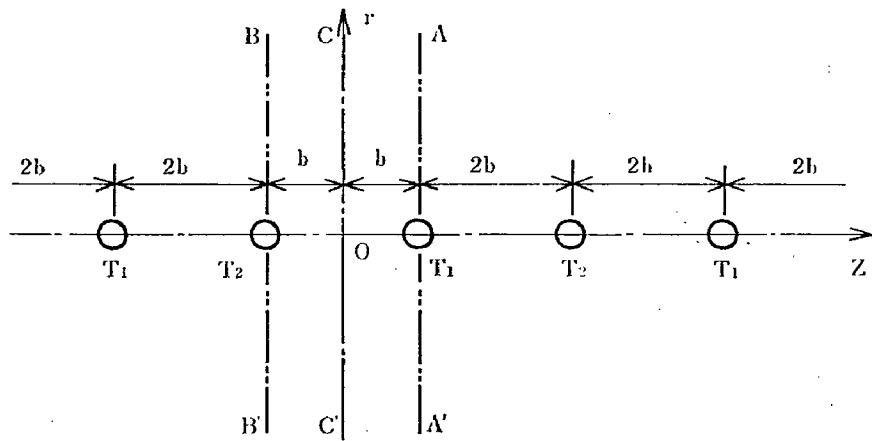


図 5.4 特異性をもつねじり物体力の直線上の分布

半球ピットをもつ無限厚板が得られる。

上述の解法の手順に従い、境界条件式 (5.9) を満足する無限厚板の変位と応力を求める。図 5.4 のように配置した無限個の集中ねじり力(特異性をもつねじり物体力)を次式のように表す。

$$F_2 = \begin{cases} \frac{f_1 b}{2\pi r^2} \delta(r), & (z > 0 \text{ では } z = (4n-3)b \text{ のとき}) \\ \frac{f_2 b}{2\pi r^2} \delta(r), & (z < 0 \text{ では } z = -(4n-1)b \text{ のとき}) \\ 0 & |z| \neq (4n-1)b, (4n-3)b \end{cases}$$

$$F_1 = F_3 = 0 \quad \dots(5.10)$$

ここに $\delta(r)$ はディラックのデルタ関数、 $n=1, 2, 3, \dots$ である。

ところで、 $F_1 = F_3 = 0$ 、 $F_2 = F_2(r, z)$ のときには、第 3 章で示された物体力問題の応力関数の式(3.12)から、次の公式を導くことができる。

$$2\mu u_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha J_1(\alpha r)}{\alpha^2 + \beta^2} \bar{F}_2 \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} d\alpha d\beta,$$

$$u_1 = u_3 = 0 \quad \dots(5.11)$$

ここに

$$\bar{F}_2(\alpha, \beta) = \iint_D F_2(r, z) J_1(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} dr dz \quad \dots(5.12)$$

ただし中かっこ内はそれぞれ対応させるものとする。 D は物体力の存在領域を表す。

式(5.10)の F_2 を式(5.12)に代入して \bar{F}_2 を求め、整理すれば次式が得られる。

$$\bar{F}_2 = \frac{f_1 b}{4\pi} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1+\eta) \cos(2n-1)\beta b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + (-1)^{n+1} (1-\eta) \sin(2n-1)\beta b \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \dots(5.13)$$

ここに $\eta = f_2/f_1$ である。また無限積分の計算は文献^(6,9)を用いた。式(5.13)を式(5.11)に代入すれば次式が得られる。

$$2\mu u_2 = \frac{f_1 b}{8\pi} r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+\eta) \left(\frac{1}{D_1^3} + \frac{1}{D_2^3} \right) + (-1)^n (1-\eta) \left(\frac{1}{D_1^3} - \frac{1}{D_2^3} \right) \right\},$$

$$u_1 = u_3 = 0 \quad \dots(5.14)$$

ここに D は次式を表す。

$$D_1^2 = r^2 + \{(2n-1)b + z\}^2, \quad D_2^2 = r^2 + \{(2n-1)b - z\}^2$$

式(5.14)の変位から応力式を求めると次のようになる。

$$\tau_{r\theta} = -\frac{3f_1 b}{16\pi} r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+\eta) \left(\frac{1}{D_1^5} + \frac{1}{D_2^5} \right) + (-1)^n (1-\eta) \left(\frac{1}{D_1^5} - \frac{1}{D_2^5} \right) \right\},$$

$$\tau_{z\theta} = -\frac{3f_1 b}{16\pi} r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+\eta) \left\{ \frac{(2n-1)b + z}{D_1^5} - \frac{(2n-1)b - z}{D_2^5} \right\} + (-1)^n (1-\eta) \left\{ \frac{(2n-1)b + z}{D_1^5} + \frac{(2n-1)b - z}{D_2^5} \right\} \right\}$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \dots(5.15)$$

これらの式は境界条件式 (5.9) を満足する解、すなわち 2 個の半球ピットに任意の大きさで同じ向きのねじり力を受ける無限厚板の変位と応力を表している。式 (5.14), (5.15) において η の代りに $- \eta$ とおけば、2 個の半球ピットに任意の大きさで逆向きのねじり力を受ける場合の解になる。また、 $\eta = 1.0$ とおけば、1 個の半球ピットをもち厚さ b の無限厚板の場合の解が得られ、 $\eta = -1.0$ とおくと 1 個の半球ピットをもち他面が剛体に接着されている厚さ b の無限厚板の場合の解が得られる^{(5,9), (5,6)}。

ここに示された解は半球ピット面 ($R=R_1, R=R_2$) に働くねじり力の分布 $T_1(\phi), T_2(\phi)$ を任意にとることはできず、ほぼ正弦波の分布である。 $T_1(\phi)$ の分布は次

式から求められる。

$$T_1(\phi) = \tau_{R\theta}|_{R=R_1} = \tau_{r\theta} \sin \phi - \tau_{z\theta} \cos \phi \quad \dots (5.16)$$

ただし $\tau_{z\theta}$ と $\tau_{r\theta}$ は、式(5.15)において r と z の代りに

$$r = R_1 \sin \phi, \quad z = b - R_1 \cos \phi$$

とおいたものである。また、式(5.15)から明らかなように、半球ピット面の σ_{Rz} , $\tau_{R\phi}$ は零となる。半球ピット面に働くねじり力の分布が正弦波で近似できない場合には、次章で述べるような方法を採用しなければならない。

以上に述べたと同様に、 z 軸上に、それぞれ長さ $2h$ の特異性をもつねじり物体力を等間隔へだてて無限個配置すれば、貫通しない円孔面にねじり力を受ける無限厚板問題の一つの近似的な解を求めることができる。

5.4 結 言

本章では、これまでの章の結果を応用して、具体的な形をもつ弾性体の問題をいくつか考察した。すなわち、第2章に示された応力関数を応用して「有限厚肉円筒が内圧を受けてテーパー状に押し広げられる問題」、第4章で示された特異性をもつ応力関数を応用して「2本の剛体テーパー棒の差し込みを受ける中空厚肉球問題」、第3章で示された物体力問題の応力関数を応用して「半球ピットにねじり力を受ける無限厚板問題」を解析的に考察した。

なお、本章の5.3節で述べた考え方はさらに一般化されて、表面に任意分布のねじり力を受ける無限厚板問題およびねじり物体力を受ける無限厚板問題のグリーン関数を求める問題にも応用されている^(6.4)。

第6章 応力関数による解法の応用 (数値解法)

6.1 緒 言

弾性問題を解析的方法のみで解くには現在のところ限界があるため、近年、弾性問題の数値解法がいくつか提案されてきている^{(6.1)~(6.12)}。それは既知の解析解(たとえば単一集中力問題の解)と電子計算機を組み合わせたもので、工学上とりあえず必要な解を求めるためにはかなりの役割を果たしており、また今後の発展が望まれている。そこで用いられる手法の基本原理は、弾性体の境界をいくつかに分割し、分割された境界上にそれぞれとられた有限個の点などで境界条件を満たすように既知の解析解を重ね合わせることである。したがって数値解法といっても、計算に用いられる解の式は弾性基礎方程式を完全に満足している。境界上のすべての点ではなく、選ばれた有限個の点でのみ境界条件を満たすということが近似解である。

これまでに報告されている数値解法は、既知の解析解として、おもに単一集中力問題の解たとえば Kelvin, Mindlin, Cerruti, Boussinesq の解を応用している。とこ

ろで実際には、物体の境界が円柱座標で表される問題も多く、この種の問題の数値解法では、Kermandis^(6.11) も述べているように、単一集中力よりもむしろある円周上に外力の働く問題の解を採用した方が便利である^(6.12)。また、既知の解析解として、表面力問題の解を利用する方法^{(6.1)~(6.9)}と物体力問題の解を用いる方法^{(6.10)~(6.12)}の二つの考え方の流れがある。本章では物体力を分布させる方法を採用する。

第3章で、ある円周上にねじり物体力を受ける半無限体問題の解(グリーン関数)を示したが、この解は、ねじり問題の数値解法において本質的な役割を果たす。その具体的な応用例として、次の6.2節で、貫通しない円孔の任意の深さに差し込まれた剛体丸棒にねじりを受ける半無限体問題の数値解法を示す。この問題の解法はその特別な場合として、円孔の底まで剛体丸棒が完全に差し込まれたときに Lucio^(6.13) が取り扱っている問題にも適用できるので、このときに、Lucio の示した積分方程式による結果と本章の数値解法による結果の比較を行う。

6.3節では、軸対称物体力を受ける無限円柱問題のグリーン関数を導く。これは6.4節での考察すなわち環状みぞをもつ丸軸の応力集中問題の数値解法を構成するための準備である。このグリーン関数は、円柱領域内のある2個の円周上に(i)半径方向に働く物体力(同じ向き)、(ii)ねじり力として働く物体力(逆向き)、(iii) z 軸方向に働く物体力(逆向き)が存在し、円柱の表面で表面力が零である問題の解である。物体力を受ける円柱問題はこれまであまり取り扱われていないようであるが、Conway^(6.14) は軸方向の単一集中力を受ける無限円柱の問題を考察している。

6.4節では、6.3節の結果を応用して、上述の環状みぞをもつ丸軸の応力集中問題の数値解法を示す。すなわち、みぞのないときの丸軸表面の境界条件を満足する物体力問題の解(グリーン関数)を重ね合わせ(一次結合)、みぞ部の境界条件を満たすようにその物体力の大きさを定める。

本章で述べる解法では、物体力を有限個の点(円周)に分布させている。ところで、点ではなく連続的に物体力を分布させると連立積分方程式を解くことに問題は帰着するから、その解を求めることができれば、問題は完全に解けることになる。しかし現在のところ、それを解くことは困難である。以下に述べられる数値解法は、この連立積分方程式を連立一次方程式に変換した一つの近似解法と考えることもできる。数学的には、連立積分方程式を解く問題が先にあって、その一つの近似解法として、有限個の点に物体力を分布させたときの解法がある

といえるかも知れない。

6.2 非貫通円孔に差し込まれた剛体丸棒でねじりを受ける半無限体

6.2.1 解法と境界条件

剛体丸棒を差し込まれた半無限体領域*に円柱座標を図 6.1 のようにとる。円孔の半径を c 、深さを b とし、この円孔の深 $z=h$ ($0 < h \leq b$) まで円孔と同径の剛体丸棒が挿入され、その接触面 ($r=c$, $0 \leq z \leq h$) は完全に接着されているものとする。この剛体丸棒が z 軸まわりに角度 α だけねじられるとき、半無限体領域の境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} z=0, \quad c \leq r < \infty; \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = 0, \\ z=b, \quad 0 \leq r \leq c; \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = 0, \\ r=c, \quad 0 \leq z \leq h; \quad u_2 = \alpha c, \\ r=c, \quad h < z \leq b; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad \dots(6.1)$$

この問題は混合境界値問題であるため、解析的方法だけで解くことはかなり困難である。 $h=b$ のとき、すなわち剛体丸棒が円孔底まで完全に挿入された場合に対しては Luco^(6,13) が問題を連立積分方程式に帰着させ、その数値解を求めている。ここでは第 3 章の式(3.25)に示されたねじり物体力を受ける半無限体問題のグリーン関数を応用して、本節の問題の一つの数値解法を提案する。

半径 r_1 の円周上に図 3.2 のようなねじり力が図 3.1 のように半無限体領域内の $z=h_1$ に働くとき、それによる

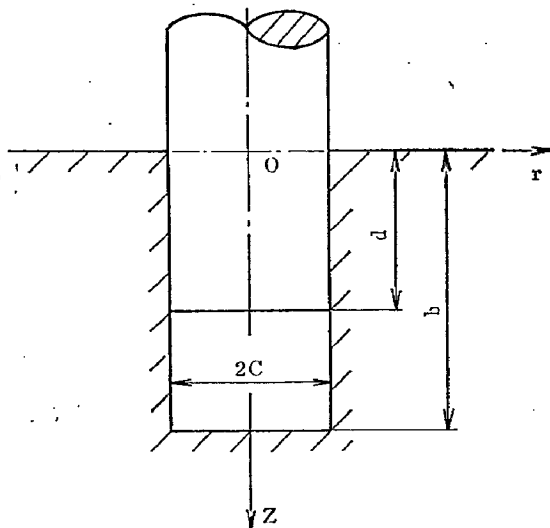


図 6.1 剛体丸棒でねじりを受ける半無限体

* 複雑な形をした実在の物体の問題は境界条件数が多くて現在の段階では取り扱うことが困難であるから、やむを得ず物体の荷重点近傍などを局所的にとらえ、観察点近傍の応力状態などを知るための仮定としての半無限体モデルといえる。しかし多くの場合、荷重方法の影響は荷重点近傍に限られ、荷重点から離れるに従って急速に等分布応力状態に近づくので、こうして得られた解も意味をもつ。

変位 u_2' は、式(3.25)において $h=h_1$ とすれば得られて次のようになる。

$$2\mu u_2' = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{r r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{1/2}(x_k), \quad u_1 = u_3 = 0 \quad \dots(6.2)$$

これから零でない応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{z\theta}' &= \frac{1}{8\pi^2 r r_1 \sqrt{r r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z + (-1)^k h_1}{x_k^2 - 1} \\ &\quad \cdot \{x_k Q_{1/2}(x_k) - Q_{-1/2}(x_k)\}, \\ \tau_{r\theta}' &= -\frac{1}{8\pi^2 r \sqrt{r r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 3Q_{1/2}(x_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x_k^2 - 1} \left(x_k - \frac{r}{r_1} \right) \{x_k Q_{1/2}(x_k) - Q_{-1/2}(x_k)\} \right\} \end{aligned} \quad \dots(6.3)$$

ただし x_k は次式を表す。

$$x_k = \frac{r^2 + r_1^2 + \{z + (-1)^k h_1\}^2}{2rr_1}$$

この解は、境界条件式(6.1)の $z=0$, $c \leq r < \infty$ の面の条件を常に満足している。したがって、上述のねじり物体力を円孔面近傍に有限個分布させたときの変位と応力は、式(6.2), (6.3)の重ね合わせ(一次結合)によって得られ、それもまた境界条件式(6.1)の第 1 式を満足している。そこで、境界条件式(6.1)の第 2 式以下を満足するように円孔の内部にねじり物体力を分布させ、円孔部分を半無限体から切り取って考えれば、本問題の解が得られる^{(6,15), (6,16)}。

図 6.2 は半無限体領域から非貫通円孔部分を切り取ったときの状態を表す。図の円孔内部に二点鎖線で示されている円筒面とその底面に図 3.1 と図 3.2 に説明されているねじり物体力をそれぞれ N, M 個配置し、円筒面 ($r=A$, $0 \leq z \leq H$) 上の N 個のねじり物体力の任意の 1 個の座標を ($r=A$, $z=h_n$), ($0 \leq h_n \leq H$, $n=1, 2, 3, \dots, N$) で、また円筒底面 ($z=H$, $0 \leq r \leq A$) 上の M 個のねじり物体力の任意の 1 個の座標を ($r=a_m$, $z=H$), ($0 < a_m < A$, $m=1, 2, 3, \dots, M$) で表す。このとき、半無限体領域の任意の

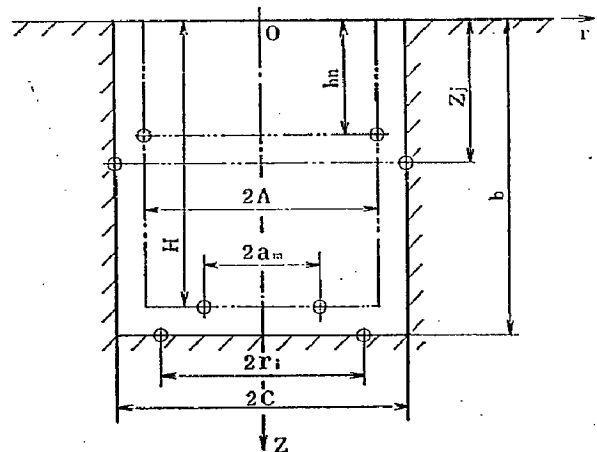


図 6.2 非貫通円孔をもつ半無限体

点 (r, z) の変位 u_2 と応力 $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ は式(6.2)あるいは式(6.3)を重ね合わせた形で次式のように表される。

$$\begin{aligned} u_2 &= \sum_{n=1}^N \xi_n u_2'(r=r, z=z, r_1=A, h_1=h_n) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \zeta_m u_2'(r=r, z=z, r_1=a_m, h_1=H), \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^N \xi_n \tau_{r\theta}'(r=r, z=z, r_1=A, h_1=h_n) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \zeta_m \tau_{r\theta}'(r=r, z=z, r_1=a_m, h_1=H), \\ \tau_{z\theta} &= \sum_{n=1}^N \xi_n \tau_{z\theta}'(r=r, z=z, r_1=A, h_1=h_n) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \zeta_m \tau_{z\theta}'(r=r, z=z, r_1=a_m, h_1=H) \end{aligned} \quad \dots(6.4)$$

ここには ξ_n, ζ_m 配置された物体力の大きさを、式(6.4)が境界条件式(6.1)を満足するように定める。前述のように、式(6.4)は ξ_n, ζ_m の値にかかわらず式(6.1)の第1式の境界条件を満足している。式(6.1)の第2式から、 $0 \leq r_j < c, z=b$ において式(6.4)の $\tau_{z\theta}=0$ という関係が得られる。また式(6.1)の第3, 4式から、 $r=c, 0 \leq z_i \leq H$ において(i) $0 \leq z_i \leq h$ のとき式(6.4)の $u_2=ac$, (ii) $h \leq z_i < b$ のとき式(6.4)の $\tau_{r\theta}=0$ という関係が得られる。

ここでは円孔境界のすべての点ではなく、有限個の円周上で境界条件を満足させる。しかし物体力の配置数 $(N+M)$ の増加につれて、実用上、十分な精度で境界条件を満たす結果が得られるようである^{(6.17), (6.18)}。このことについては後で触れる。

式(6.4)は合計 $(N+M)$ 個の任意定数 ξ_n, ζ_m をもっているから、境界条件を満足させる点(円周)として、円孔面とその底面に合計 $(N+M)$ 個の点(円周)、 $(r=c, z=z_i, i=1, 2, 3, \dots, I)$ および $(z=b, r=r_j, j=1, 2, 3, \dots, J, I+J=N+M)$ をとることができる。すなわち、式(6.4)から ξ_n, ζ_m を未知係数とする $(N+M)$ 元の連立一次方程式を構成し、それを解いて物体力の大きさ ξ_n, ζ_m を定めれば、式(6.4)から任意の点の変位と応力が求められる。

ところで上述の解法では、物体力を有限個の点(円周)に配置したが、この配置数を無限個とした場合すなわち点ではなく連続的に物体力を分布させた場合には、それによる変位と応力は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} &= \int_0^H \xi(h_1) \begin{Bmatrix} u_2' \\ \tau_{r\theta}' \\ \tau_{z\theta}' \end{Bmatrix} dh_1 \quad (r=r, z=z, r_1=A, h_1=h_1) \\ &\quad + \int_0^A \zeta(r_1) \begin{Bmatrix} u_2' \\ \tau_{r\theta}' \\ \tau_{z\theta}' \end{Bmatrix} dr_1 \quad (r=r, z=z, r_1=r_1, h_1=H) \end{aligned} \quad \dots(6.5)$$

で表される。したがって、式(6.5)に境界条件式(6.1)を適用して連立積分方程式を構成し、それを解いて未知関数 $\xi(h_1)$ と $\zeta(r_1)$ が求められれば、式(6.5)から任意の点の変位と応力が得られる。しかし現在のところ $\xi(h_1), \zeta(r_1)$ を求めることは困難である。それで、その一つの近似解法として、前述の連立一次方程式による解法が意味をもつ。換言すれば、式(6.4)は式(6.5)の特別な場合のものである。

6.2.2 数値計算例

前項で述べた連立一次方程式による解法により、 $c/b=0.5$ の円孔に剛体丸棒が $h/b=1.0$ の深さに差し込まれた場合(Lucoの問題)に対し数値計算を実行した^(6.15)。 $N=51, M=49$ とし、 $A/c=H/b=0.96$ の面に h_1 として51個、 r_1 として49個の点(円周)を取り、簡単のため、すべて等間隔に物体力を配置した。また、境界条件を満足させるために選ぶ $(N+M)$ 個の円孔境界面上の点 $(z=b, r=r_j)$ および $(r=c, z=z_i)$ の円周 r_j, z_i は、それぞれ r_1, h_1 と同じ値を採用した。結果の一部を図示すれば図6.3のようになる。この図は、円孔面と剛体丸棒の接着面の接着応力を表しており、比較のため、Lucoの結果(実線)と本節の結果(丸印)がともに記入されている。両者はよく一致しているといえる。

6.2.3 解の収束性

図6.4と図6.5は物体力の配置数と解の収束性の関係を検討するため、 $c/b=0.5$ の円孔に対し、 $h/b=0.5, A/b=H/b=0.9$ のとき、 $N=M=9, 18, 27$ および36としたときの結果を比較したものである。図6.4は円孔面と剛体丸棒の接着面 $(r/c=1.0)$ の変位 u_2 の収束性を示したもので、物体力の配置数すなわち N, M の増加につれて結果は明らかに真の解1.0に近づいている。図6.5は円孔の境界面から物体の領域内にごくわずかに入った点 $(r/c=1.02$ と $1.05)$ での解の収束性と物体力の配置数 (N, M) の関係を図示したものである。

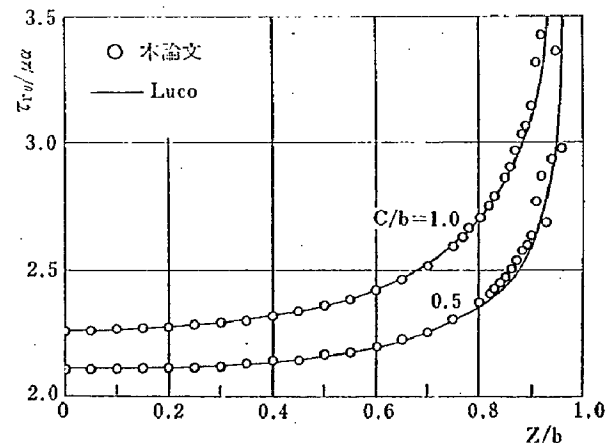


図 6.3 剛体丸棒と円孔面の接着応力

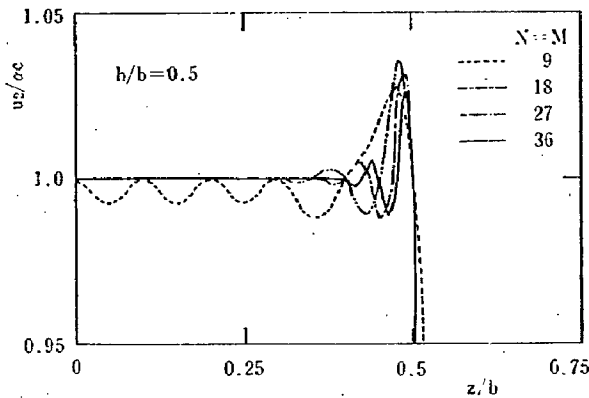


図 6.4 解の収束性 (円孔表面)

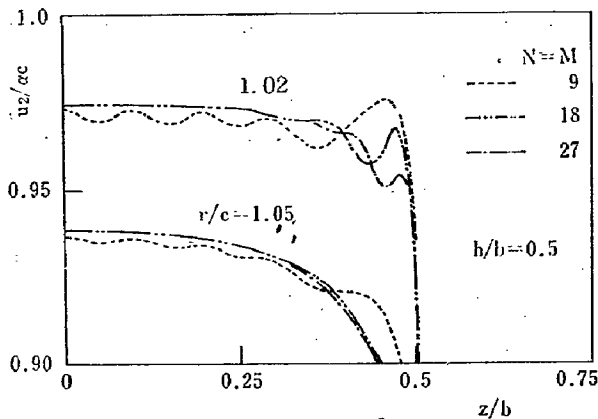


図 6.5 解の収束性 (物体内表面近傍)

境界面に非常に近い点($r/c=1.02$ の場合)では境界上の荷重の不連続点近傍での解の振動の影響が少し残っているが、境界から遠ざかるにつれてその影響は減少しており、物体の内部では($r/c=1.05$ の場合)、物体力の配置数にほとんど関係なく、ある一つの値に収束している。荷重の不連続点近傍では、解は特異性をもつことが多いため、このような点の近くでは、物体力の配置数を多くとらないと解は振動するようである。なお、選点法による数値解法では、選点数が少ないとき解が振動することが知られている^(6,18)。村上^(6,13)は平面問題のときに解の収束性に関して述べているが、それとだいたい同じことが本章の場合にもいえるようである。

なお、本章の数値解法では、グリーン関数の特異性を避けるため境界から適度に離れた点に物体力を分布させているが、その距離は、境界条件を満足させるために選んだ境界上の点の間隔のだいたい2倍以上にとればよいようである。また、解の収束に必要な物体力の配置数(結果の精度)は荷重を表す関数のなめらかさに関係すると思われるが、この種の考察は本論文の対象から除外することにする。

本節で述べた解法の一部を少し変更すれば、非貫通円孔に任意分布のねじり力あるいはねじり変位を受ける半

無限体問題の数値解法が得られるが^(6,19)、ここでは省略する。

6.3 軸対称物体力を受ける無限柱問題のグリーン関数

6.3.1 応力関数と境界条件

これまでの議論から明らかなように、物体力問題のグリーン関数は境界値問題の数値解法において重要な役割を果たす。次節で環状みぞをもつ丸軸の応力集中問題の数値解法が示されるが、ここではその準備として、軸対称物体力を受ける無限円柱問題のグリーン関数を求める。すなわち、無限円柱領域内のある2個の円周上に、(i)半径(r)方向に働く物体力、(ii) z 軸方向に働く物体力、(iii) z 軸まわりのねじり力として働く物体力が存在する問題の解を導く。ただし次節での応用を考えて、上述の(i)の半径方向物体力は同じ向き、(ii)の z 軸方向物体力と(iii)のねじり物体力は逆向きに働く場合を考える。2個の円周は同径で、 $z=0$ の面に対称の位置に作用させる。

円柱の半径を c とし、その表面に外力は作用していないものとする。したがって円柱の境界条件は次のようになる。

$$r=c, |z|\geq 0; \sigma_r=\tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0 \quad \dots(6.6)$$

ここでは、第3章の式(3.12)に示された物体力問題の応力関数を少し変形して、次式の形の応力関数を採用する。

$$\phi_1 = -\frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha J_n(\alpha r)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left\{ \begin{matrix} \bar{F}_{1c} \cos \beta z \\ \bar{F}_{1s} \sin \beta z \end{matrix} \right\} d\alpha d\beta \quad \dots(6.7)$$

ただし $\bar{F}_{1c}(\alpha, \beta)$, $\bar{F}_{1s}(\alpha, \beta)$ は

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{F}_{1c} \\ \bar{F}_{1s} \end{matrix} \right\} = \iint_D r F_1(r, z) J_n(\alpha r) \left\{ \begin{matrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{matrix} \right\} dr dz \quad \dots(6.8)$$

であり、ことわりのない記号は第3章のそれと一致している。

ところで式(6.7)の応力関数 ϕ_1 は、このままの形では境界条件式(6.6)を一般には満足しないから、第3章で述べた物体力の働く半無限体問題の場合と同様、式(6.7)の ϕ_1 と重ね合わせると境界条件式(6.6)を満たすような応力関数を別に用意しなければならない。このような応力関数として、第2章の式(2.5), (2.8)に示されている応力関数から、次のものを採用する。

$$\begin{aligned} \phi_2 &= -\int_0^\infty b r I_1(\beta r) \sin \beta z d\beta, \\ \phi_3 &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta^3} \left\{ I_0(\beta r) (b_3 \sin \beta z + b_4 \cos \beta z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta r}{2} I_1(\beta r) (b_3' \sin \beta z + b_4' \cos \beta z) \right\} d\beta \end{aligned} \quad \dots(6.9)$$

式(6.9)の応力関数から次の応力式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \{I_0(\beta r) + I_2(\beta r)\} (b_3' \cos \beta z - b_4' \sin \beta z) \\
 &\quad + \{(1-2\nu)I_0(\beta r) + \beta r I_1(\beta r)\} \\
 &\quad \cdot (b_3' \cos \beta z - b_4' \sin \beta z) d\beta, \\
 \sigma_\theta &= -\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\beta r} I_1(\beta r) (b_3 \cos \beta z - b_4 \sin \beta z) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-2\nu}{2} I_0(\beta r) (b_3' \cos \beta z - b_4' \sin \beta z) \right\} d\beta, \\
 \sigma_z &= \int_0^\infty \left\{ I_0(\beta r) (b_3 \cos \beta z - b_4 \sin \beta z) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ (2-\nu)I_0(\beta r) + \frac{\beta r}{2} I_1(\beta r) \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (b_3' \cos \beta z - b_4' \sin \beta z) \right\} d\beta, \\
 \tau_{rz} &= \int_0^\infty \left\{ I_1(\beta r) (b_3 \sin \beta z + b_4 \cos \beta z) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ (1-\nu)I_1(\beta r) + \frac{\beta r}{2} I_0(\beta r) \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (b_3' \sin \beta z + b_4' \cos \beta z) \right\} d\beta, \\
 \tau_{r\theta} &= \int_0^\infty b\beta I_2(\beta r) \sin \beta z d\beta, \\
 \tau_{z\theta} &= \int_0^\infty b\beta I_1(\beta r) \cos \beta z d\beta \quad \dots(6.10)
 \end{aligned}$$

任意定数 b, b_3, b_4, b_3', b_4' の値は境界条件式(6.6)から定める。

6.4.2 半径方向に働く物体力

無限円柱領域内の半径 $r=a, (0 < a < c), z=\pm h$ の2個の円周上に、図6.6に示すような半径(r)方向に働く物体力

$$F_1(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-a) \{ \delta(z-h) + \delta(z+h) \} \quad \dots(6.11)$$

が存在するものとする。式(6.11)の F_1 を式(6.8)に代入すれば

$$\bar{F}_{1c}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} J_1(\alpha a) \cos \beta h \quad \dots(6.12)$$

となり、他の $\bar{F}_{jc}, \bar{F}_{js}$ は零となるから、これと式(6.7)の応力関数から応力式を求めると次のようになる。

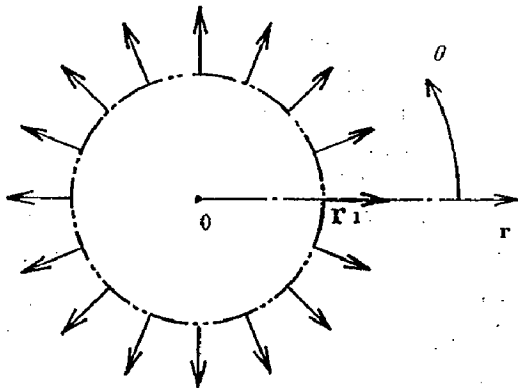


図 6.6 ある円周上の半径方向放射状力

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)r\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^2 \left\{ (3-2\nu) \left\{ Q_{1/2}(x_k) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{x_k^2-1} \left(x_k - \frac{r}{a} \right) Q \right\} - 2(3-4\nu) Q_{1/2}(x_k) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{z_k^2}{2ar(x_k^2-1)} A_3 \right\}, \\
 \sigma_\theta &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)r\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^2 \left\{ 2(3-4\nu) Q_{1/2}(x_k) \right. \\
 &\quad \left. + 2\nu \left\{ Q_{1/2}(x_k) - \frac{1}{x_k^2-1} \left(x_k - \frac{r}{a} \right) Q \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z_k^2}{2ar(x_k^2-1)} Q \right\}, \\
 \sigma_z &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)r\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{z_k^2}{2ar(x_k^2-1)} A_3 \right. \\
 &\quad \left. - (1-2\nu) \left\{ Q_{1/2}(x_k) - \frac{1}{x_k^2-1} \left(x_k - \frac{r}{a} \right) Q \right\} \right\}, \\
 \tau_{rz} &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)ar\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^2 \frac{z_k}{x_k^2-1} \{ A_4 + 2(1-\nu)Q \}, \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{z\theta} = 0 \quad \dots(6.13)
 \end{aligned}$$

ここに $z_k = z + (-1)^k h$ であり、 x_k, Q, A は次式を表す。

$$\begin{aligned}
 x_k &= \frac{r^2 + a^2 + z_k^2}{2ar}, \\
 Q &= x_k Q_{1/2}(x_k) - Q_{-1/2}(x_k), \\
 A_4 &= Q - \frac{z_k^2}{2ar} Q_{1/2}(x_k) + \frac{2}{x_k^2-1} \frac{z_k^2}{ar} \\
 &\quad \cdot \{ x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k) \}, \\
 A_3 &= 3Q_{-1/2}(x_k) + \frac{r}{a} Q_{1/2}(x_k) \\
 &\quad - \frac{4}{x_k^2-1} \left[Q + \frac{r}{a} \{ x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k) \} \right], \\
 A_3 &= A_3 + 2Q \quad \dots(6.14)
 \end{aligned}$$

式(6.10)と(6.13)式をそれぞれ重ね合わせ、境界条件式(6.6)を満足するように式(6.10)の任意定数の値を定めれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
 b_3 &= -\frac{\beta \cos \beta h}{\pi^2(1-\nu)D} [q_3 \{ 2(1-\nu)I_1(\beta c) + \beta c I_0(\beta c) \} \\
 &\quad - q_4 \{ (1-2\nu)I_0(\beta c) + \beta c I_1(\beta c) \}], \\
 b_3' &= -\frac{\beta \cos \beta h}{\pi^2(1-\nu)D} [q_1 \{ I_0(\beta c) + I_2(\beta c) \} - 2q_3 I_1(\beta c)], \\
 b &= b_4 = b_4' = 0 \quad \dots(6.15)
 \end{aligned}$$

ここに D, q_3, q_4 は次式を表す。

$$\begin{aligned}
 D &= \{ I_0(\beta c) + I_2(\beta c) \} \{ 2(1-\nu)I_1(\beta c) + \beta c I_0(\beta c) \} \\
 &\quad - 2I_1(\beta c) \{ (1-2\nu)I_0(\beta c) + \beta c I_1(\beta c) \}, \\
 q_3 &= \left\{ (1-2\nu)I_1(\beta a) - \frac{\beta a}{2} I_1(\beta a) \right\} \{ K_0(\beta c) + K_2(\beta c) \} \\
 &\quad + I_1(\beta a) \{ \beta c K_1(\beta c) + K_2(\beta c) + 2\nu K_0(\beta c) \}, \\
 q_4 &= -2(1-\nu)I_1(\beta a) K_1(\beta c) - \beta c I_1(\beta a) K_0(\beta c) \\
 &\quad + \beta a I_0(\beta a) K_1(\beta c) \quad \dots(6.16)
 \end{aligned}$$

以上の結果により、ある2個の円周 ($r=a, z=\pm h$) 上に半径(r)方向に働く物体力があり、境界条件式(6.6)を

満足する無限円柱の応力は次式のように表せることになる (6.20)。

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \text{式(6.13)の} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} + \text{式(6.10)の} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} \quad \text{式(6.15)の } b),$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \quad \dots(6.17)$$

6.4.3 z 軸方向に働く物体力

前項と同様な考察を行えば、2 個のある円周 ($r=a$, $z=\pm h$) 上に z 軸方向で互に逆向きに働く物体力

$$F_3(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-a) \{\delta(z-h) - \delta(z+h)\} \quad \dots(6.18)$$

が存在し、境界条件式(6.6)を満足する無限円柱の応力として、次式が求められる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \text{式(6.20)の} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} + \text{式(6.10)の} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} \quad \text{式(6.22)の } b)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \quad \dots(6.19)$$

ここに式(6.20)は次式を意味する。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)ar\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z_k}{x_k^2 - 1} \\ &\quad \cdot \left[A_1 + (x_k^2 - 1)Q_{1/2}(x_k) \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \{x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k)\} - \left(x_k - \frac{a}{r}\right)Q \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)ar\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z_k}{x_k^2 - 1} \\ &\quad \cdot \left[(x_k^2 - 1)Q_{1/2}(x_k) \right. \\ &\quad \left. - 2\nu \{x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k)\} - \left(x_k - \frac{a}{r}\right)Q \right], \\ \sigma_z &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)ar\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z_k}{x_k - 1} \\ &\quad \cdot [A_1 - 2(1-\nu) \{x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k)\}], \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)a\sqrt{ar}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x_k^2 - 1} \\ &\quad \cdot \left[(1-2\nu)(x_k^2 - 1)Q_{1/2}(x_k) \right. \\ &\quad \left. - \left(x_k - \frac{a}{r}\right)Q + \frac{z_k^2}{2ar} A_{11} \right] \quad \dots(6.20) \end{aligned}$$

ただし Q は式(6.14)の Q, A は次式を表す。

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(1 - \frac{2x_k}{x_k^2 - 1} \frac{z_k^2}{ar}\right) \{x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k)\} \\ &\quad + \frac{z_k^2}{2ar} Q_{-1/2}(x_k), \\ A_{11} &= 3Q_{-1/2}(x_k) + \frac{a}{r} Q_{1/2}(x_k) \\ &\quad - \frac{4}{x_k^2 - 1} \left[Q + \frac{a}{r} \{x_k Q_{-1/2}(x_k) - Q_{1/2}(x_k)\} \right] \quad \dots(6.21) \end{aligned}$$

また、式(6.22)の b は次式を表す。

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\beta \sin \beta h}{\pi^2(1-\nu)D} [q_1 \{2(1-\nu)I_1(\beta c) + \beta c I_0(\beta c)\} \\ &\quad - q_2 \{(1-2\nu)I_0(\beta c) + \beta c I_1(\beta c)\}], \\ b_1' &= -\frac{\beta \sin \beta h}{\pi^2(1-\nu)D} [q_2 \{I_0(\beta c) + I_2(\beta c)\} - 2q_1 I_1(\beta c)], \\ b &= b_3 = b_3' = 0 \quad \dots(6.22) \end{aligned}$$

ただし D は式(6.16)の D を、 q_1 と q_2 は次式を表す。

$$\begin{aligned} q_1 &= 2(1-\nu)I_0(\beta a)K_0(\beta c) + \frac{2}{\beta c} I_0(\beta a)K_1(\beta c) \\ &\quad + \frac{\beta a}{2} I_1(\beta a) \{K_0(\beta c) + K_2(\beta c)\} - I_0(\beta a) \\ &\quad \cdot \{\beta c K_1(\beta c) + K_2(\beta c)\}, \\ q_2 &= \beta c I_0(\beta a)K_0(\beta c) - \beta a I_1(\beta a)K_1(\beta c) \\ &\quad - 2(1-\nu)I_0(\beta a)K_1(\beta c) \quad \dots(6.23) \end{aligned}$$

6.4.4 ねじり力として働く物体力

無限円柱領域内のある 2 個の円周 ($r=a$, $z=\pm h$) 上に図 3.2 に示されているねじり物体力が互に逆向きに作用するものとする。このねじり物体力は次式で表される。

$$F_2(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-a) \{\delta(z-h) - \delta(z+h)\} \quad \dots(6.24)$$

6.4.2 項と同様な考察を行えば、円柱領域内で式(6.24)の物体力が作用し、境界条件式(6.6)を満足する円柱の応力として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{1}{8\pi^2 r \sqrt{ar}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \\ &\quad \cdot \left\{ 3Q_{1/2}(x_k) + \frac{1}{x_k^2 - 1} \left(x_k - \frac{r}{a}\right)Q \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\beta I_1(\beta a)}{I_2(\beta c)} K_2(\beta c) I_2(\beta r) \sin \beta h \sin \beta z d\beta, \\ \tau_{z\theta} &= -\frac{1}{8\pi^2 a r \sqrt{ar}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z_k}{x_k^2 - 1} Q \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\beta I_1(\beta a)}{I_2(\beta c)} K_2(\beta c) I_1(\beta r) \sin \beta h \cos \beta z d\beta \quad \dots(6.25) \end{aligned}$$

なお、本節で必要としたベッセル関数を含む式の積分は、Eason^(6.21)らの結果を応用し、文献^{(6.22)~(6.23)}を参考にしている。

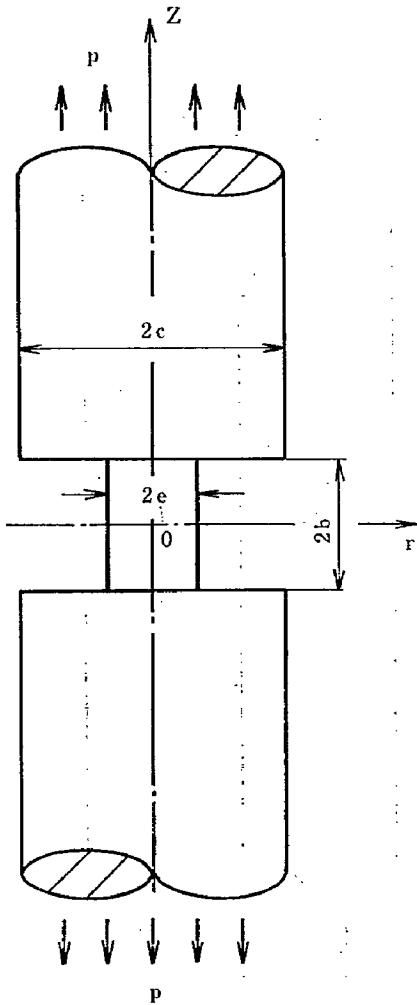


図 6.7 四角形の環状みぞをもつ円柱

6.4 環状みぞをもつ丸軸の引張り

6.4.1 四角形の環状みぞの場合

ここでは前節の結果を応用して、図 6.7 のような四角形の環状みぞをもつ丸軸が引張り（圧縮）力を受ける弾性問題の数値解法を示す。丸軸の半径を c 、みぞ部の半径を e 、みぞ幅を $2b$ とし、みぞ部から十分に離れたところで z 軸方向の等分布応力 p を受けるものとする。この丸軸の境界条件は次式のようになる。

$$\begin{aligned} r=c, |z| \geq b; \sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} &= 0, \\ r=e, |z| \leq b; \sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} &= 0, \\ |z|=b, e \leq r \leq c; \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} &= 0, \\ |z| \gg b; \sigma_z &= p, \end{aligned}$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \quad \dots (6.26)$$

解法の基本原理は本章の 6.2 節の場合と同様であるが、引張り力を受ける場合はねじり力のとときと異なり、境界上のある点での応力成分は 2 個すなわち τ_{rz} と σ_r あるいは τ_{rz} と σ_z をもつ。したがって、これらがともに境界条件を満たすようにするためには、境界上の 1 点に対し

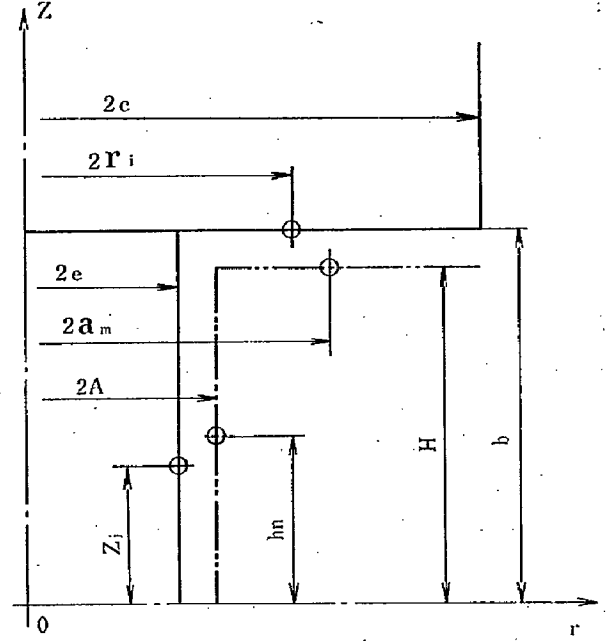


図 6.8 みぞ近傍での物体力の分布

て異なる 2 個の物体力を配置する必要がある。

前節で述べたある円周上の半径 (r) 方向物体力と z 軸方向物体力を無限円柱内に図 6.8 のようにそれぞれ $(N+M)$ 個分布させる。ただし問題の対称性により、 $z \geq 0$ の範囲で考えればよい。それぞれの物体力を円筒面 ($r=A$, $0 < z < H$) に N 個、円面 ($A \leq r < c$, $z=H$) に M 個、したがって合計 $2(N+M)$ 個、分布させる。その任意の 1 個の座標を $(r=A, z=h_n)$ あるいは $(r=a_m, z=H)$ で表す。ただし、 $0 < h_n < H < b$, $e < A \leq a_m < c$ である。このとき、円柱の任意の点 (r, z) の応力は、前節の式 (6.17), (6.19) を用いて、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^N \left\{ \xi_n^r \begin{Bmatrix} \sigma_r^r \\ \sigma_\theta^r \\ \sigma_z^r \\ \tau_{rz}^r \end{Bmatrix} + \xi_n^z \begin{Bmatrix} \sigma_r^z \\ \sigma_\theta^z \\ \sigma_z^z \\ \tau_{rz}^z \end{Bmatrix} \right\}_{(r=r, z=z, a=A, h=h_n)} \\ &+ \sum_{m=1}^M \left\{ \zeta_m^r \begin{Bmatrix} \sigma_r^r \\ \sigma_\theta^r \\ \sigma_z^r \\ \tau_{rz}^r \end{Bmatrix} + \zeta_m^z \begin{Bmatrix} \sigma_r^z \\ \sigma_\theta^z \\ \sigma_z^z \\ \tau_{rz}^z \end{Bmatrix} \right\}_{(r=r, z=z, a=a_m, h=H)} \\ &+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (6.27) \end{aligned}$$

ただし、右上部に添字 r をもつ応力は半径方向物体力による応力で式 (6.17) を、添字 z をもつものは z 軸方向物

体力によるもので式(6.19)を表す。 $\xi_n^r, \xi_n^z, \zeta_m^r, \zeta_m^z$ は物体力の大きさを表す $2(N+M)$ 個の任意定数である。

以上のように円柱内に物体力を働かせても(図6.8の二点鎖線), 物体力の存在領域は丸軸の環状みぞ部として切り取ってしまうから, 物体力をもたず, z 軸方向力 p だけを受ける丸軸が得られる。

式(6.27)は境界条件式(6.26)の第1式を常に満足している。第2式, 第3式を満足させるため, 環状みぞ部の境界面に $(N+M)$ 個の点(円周)を選び, その座標を $(r=c, z=z_i)$ および $(r=r_j, z=b)$ で表す。ここに $c < r_j < c$, $0 < z_i < b$ である。すなわち, みぞ部では, 境界面のすべての点ではなく, 選ばれた有限個の点(円周)で境界条件を満足させる。

境界条件式(6.26)の第2, 第3式と式(6.27)から $2(N+M)$ 元の連立一次方程式を構成し, それを解いて $\xi_n^r, \xi_n^z, \zeta_m^r, \zeta_m^z$ の値を定めれば, 環状みぞをもつ丸軸の任意の点の応力が式(6.27)から求められる。

以上に述べた解法は物体力を有限個の点(円周)に配置する方法であるが, 点ではなく連続的に物体力を分布させれば, 問題は連立積分方程式を解くことに帰着される。

6.4.2 半円形の環状みぞの場合

前節で示された四角形の環状みぞをもつ丸軸問題の解法は, それをごくわずかに変更することにより, 他の形状のみぞをもつ丸軸問題^{(6.26)~(6.35)}にも容易に適用できる。そこでここでは, すでに多くの報告がなされている半円形の環状みぞをもつ丸軸の引張りの応力集中問題に前節の方法を適用し, 従来の結果と比較してみる。みぞの形が半円形の場合には, これまですでに多くの研究が行なわれているが, それらの間にはかなりの相異が見られる^{(6.9), (6.36)}。

図6.9に示すように円柱座標をとり, 丸軸の半径を c , 半円形みぞの半径を b とし, そして丸軸はみぞから十分に離れたところで等分布引張り応力 p を受けるものとする。図6.10は半円みぞの一部の拡大図で, 半径 c で示されている二点鎖線は物体力の配置面を表す。この面に物体力(r 方向物体力と z 方向物体力)を N 個分布させ, その任意の1個の座標を $(r=a_j, z=h_j)$ で表す。また, 境界条件を満足させるために選ぶ半円形みぞ表面上の N 個の点(円周)の任意の1個の座標を $(r=r_i, z=z_i)$ で表す。

丸軸表面および半円形みぞ部表面に表面力は作用していないものとするれば, 境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} r=c, b \leq |z| < \infty; \sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{\theta\theta} = 0, \\ \text{半径 } b \text{ の半円みぞの表面}(r_i, z_i); \text{表面力}=0 \end{aligned} \quad \cdots(6.28)$$

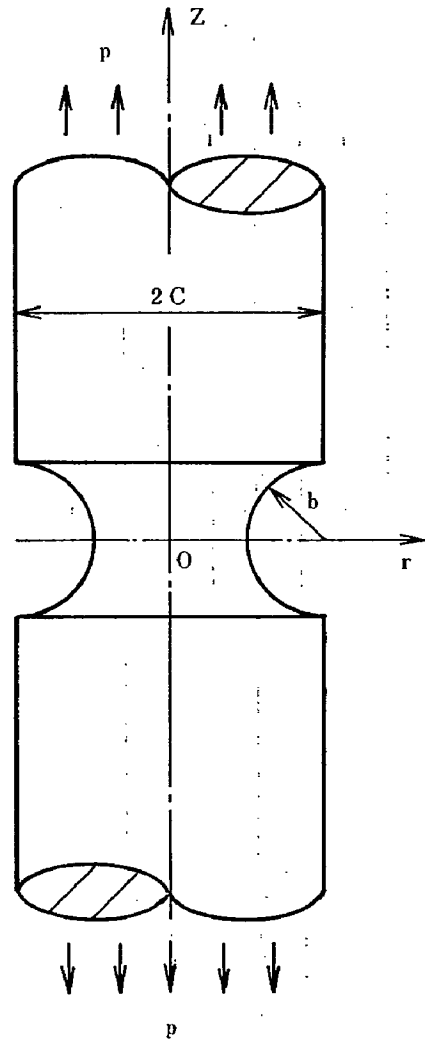


図 6.9 半円形環状みぞをもつ丸軸

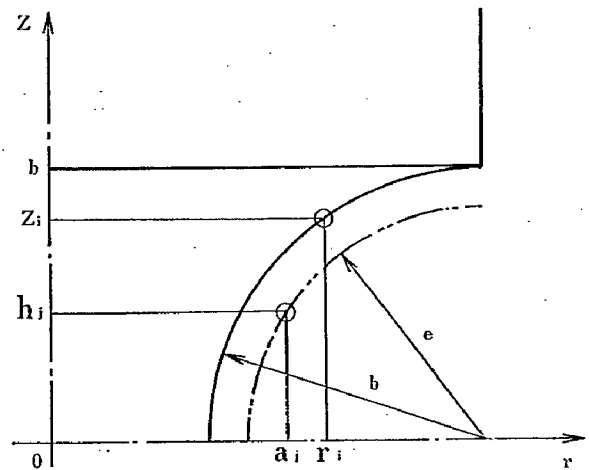
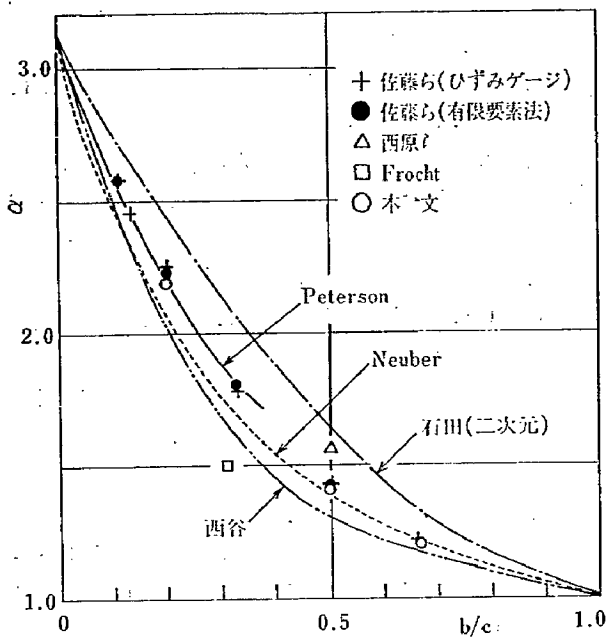


図 6.10 半円みぞ近傍での物体力の分布

前節で述べた数値計算法に上述の修正を行えば, 前節の解法はそのまま本節の問題にも適用できる。半円みぞの大きさが次の三つの場合に対して数値計算を実行し


 図 6.11 半円みぞ半径 b と形状係数 α の関係

た。

(i) $b/c=1/5$, ($e/c=0.13$, $N=15$)

(ii) $b/c=1/2$, ($e/c=0.4$, $N=30$)

(iii) $b/c=2/3$, ($e/c=0.5$, $N=30$)

ただし、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、 r_i と z_i および a_j と h_j の値はみぞ表面および物体力分布面を N 等分した値を採用した。

図6.11は計算結果(白丸印)を図示したもので、半円みぞの半径 b と形状係数 α すなわち $\alpha=(\sigma_z)_{\max}/\sigma_0$ の関係を表す^(6.31)。ここに σ_0 はみぞ部最小横断面の平均応力で $\sigma_0=c^2p/(c-b)^2$ である。図中、黒丸印は佐藤^(6.29)らの有限要素法による値、+印はひずみゲージによる測定値である。□印は Frocht^(6.34)の光弾性($\nu=0.365$)による値、△印は西原^(6.30)らの実験を併用した解析による値を示す。また、点線は Neuber^(6.32)、二点鎖線は西谷^(6.9)、実線は Peterson^(6.33)、一点鎖線は石田^(6.35)の二次元の結果である。白丸印は本節の結果で、上述の佐藤ら^(6.29)の結果に最も近い値を示している。なお、さらに詳細な議論ならびに図が別報^(6.20)に論じられている。

また、式(6.25)を用いて前項と同様な考察を行えば、環状みぞをもつ丸軸のねじり問題^(6.33)、^(6.37)の数値解法を示すことができるが、ここでは省略する。

6.5 結 言

本章のおもな結果を要約すると次のようになる。

(1) 物体力問題のグリーン関数を応用して、弾性問題の数値解法を提示考察した。取り扱われた問題は、(i)非貫通円孔の任意の深さに差し込まれた剛体丸棒にねじりを受ける半無限体、(ii)環状みぞをもつ丸軸の引張り、で

あるが、上記問題の解法の他の問題への拡張は容易である。

(2) 本章で示された解法では、物体領域内のある円周上に物体力が働く問題の解(グリーン関数)が基本的な役割を果たしている。この目的のため、軸称物体力を受ける無限円柱問題のグリーン関数を導いた。

(3) 上記(1)の(i)の問題の解法は、その特別な場合として、円孔の底まで剛体丸棒が完全に差し込まれたときの Luco の問題にも適用できるので、このときに Luco の積分方程式による結果と本章のそれを比較したところ、両者はよく一致した。また、物体力の配置数と解の収束性の関係を考察した。

(4) 半円形の環状みぞをもつ丸軸の引張り問題については、すでに多くの報告があるが、それらの結果の間にはかなりの相異が見られる。本章の結果は、佐藤らのひずみゲージによる測定値ならびに有限要素法による計算値にきわめて近い値を示した。

あ と が き

本論文は昭和53年度学位論文「軸対称弾性問題の応力関数による解法に関する研究」を要約したものである。

本研究を実施するにあたり、厳しくかつ暖かいご指導とご鞭撻をいただいた恩師福田秀雄教授ならびに、貴重な多くの助言をいただいた古橋朗蔵教授、大亦洵一郎助教授に深い敬意と謝意を表する次第である。

文 献

第 1 章

- (1. 1) A.E.H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, (1944), p.274, Dover.
- (1. 2) H.M. Westergaard: Theory of Elasticity and Plasticity, (1964), p.119, Dover.
- (1. 3) B. Galerkin: Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **190**(1930), p.1047.
- (1. 4) 中原: 第22回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭47), p.149.
- (1. 5) 宮本: 3次元弾性論, (昭42), p.16, 裳華房.
- (1. 6) 宮本: 機械学会誌, **60**-460(昭32), p.477.
- (1. 7) 佐武・平井: 第27回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭52), p.289.
- (1. 8) R. Furuhashi: 明治大学科学技術研究所紀要, 第11冊(昭47), p.73.
- (1. 9) E. Sternberg: Structural Mechanics (ed. by J.N. Goodier and N.J. Hoff), (1958), p.48, Pergamon Press.

- (1. 10) K. Marguerre: Z. AMM, 35-6/7(1955), p. 242.
- (1. 11) 宮本: 機械学会論文集, 22-123(昭31), p.789.
- (1. 12) R.D. Mindlin: Bull. Amer. Math. Soc., 42 (1936), 373.
- (1. 13) 長谷川: 機械学会論文集, 41-351(昭50), p. 3059.
- (1. 14) H. Hasegawa: Bull. of JSME, 19-133(1976) p.739.
- (1. 15) 長谷川: 機械学会論文集, 40-337(昭49), p. 2494.
- (1. 16) H. Hasegawa: Bull. of JSME, 18-119(1975) p.484.

第2章

- (2. 1) 渋谷: 機械学会論文集, 41-347 (昭50), p. 1957.
- (2. 2) 文献(1.5)の p.21
- (2. 3) R.W. Little: Elasticity, (1973), p.367, Prentice-Hall.
- (2. 4) 文献(1.5)の p.1.
- (2. 5) 文献(1.11).
- (2. 6) 鵜戸口: 機械学会誌, 56-408(昭28), p.2.
- (2. 7) 鵜戸口: 機械学会誌, 60-456(昭32), p.3.
- (2. 8) 文献(1.3).
- (2. 9) P.F. Papkovitch: Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 195(1932), p.513.
- (2. 10) H. Neuber: Z. AMM, 14-4(1934), p.203.
- (2. 11) H. Neuber: Kerbspannungslehre, (1937), p. 19, Julius Springer.
- (2. 12) 文献(1.12).
- (2. 13) 長谷川: 機械学会論文集, 41-352(昭50), p. 3494.
- (2. 14) E. Sternberg and R.A. Eubanks: Quart. Appl. Math., 15-2(1957), p.145.
- (2. 15) P.P. Teodorescu: Acta Mech., 14(1972), p. 103.
- (2. 16) Зильбергейт и И.Н. Златина: Докл. Акад. Наук СССР, 227-1(1976), p.74.
- (2. 17) 文献(1.2).
- (2. 18) 文献(1.10).
- (2. 19) 文献(1.8).
- (2. 20) C.K. Youngdahl: Int. J. Engng. Sci., 7(1969) p.61.
- (2. 21) A.I. Lur'e: Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, (1964), p.325, Interscienc.
- (2. 22) 柴原・尾田: 金沢大学工学部紀要, 5-1(昭43), p.27.
- (2. 23) L.N.G. Filon: Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 198(1902), p.147.
- (2. 24) 小野: 材料力学, (昭17), p.409, 丸善.
- (2. 25) S. Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of Elasticity, (1951), p.343, McGraw-Hill.
- (2. 26) A. Timpe: Z. AMM, 4-5(1924), p.361.
- (2. 27) I.N. Sneddon: Fourier Transforms, (1951), p.450, McGraw-Hill.
- (2. 28) C.J. Tranter: Integral Transforms in Mathematical Physics, (1971), p.40, Chapman and Hall.
- (2. 29) 文献(1.15)と(1.16).
- (2. 30) F. Bowman: Introduction to Bessel Functions, (1938), p.44, Longman, Green and Comp.
- (2. 31) 齊藤: 機械学会論文集, 18-18(昭27), p.21.
- (2. 32) 柴原・尾田: 機械学会論文集, 34-359(昭43), p.388.
- (2. 33) 佐賀・能島: 機械学会論文集, 37-293(昭46), p.53.
- (2. 34) 相原: 機械学会論文集, 40-333 (昭49), p. 1287.
- (2. 35) 沢・丸山: 機械学会論文集, 41-346(昭50), p.1917.
- (2. 36) 木村: 土木学会誌, 17-8(昭6), p.713.
- (2. 37) C.J. Tranter: Quart. Appl. Math., 4-3(1946) p.298.
- (2. 38) O.L. Bowie: Quart. Appl. Math., 5-1(1947) p.100.
- (2. 39) K. Chandrashekhara: AIAA J., 7-6(1969), p.1161.
- (2. 40) J.H. Michell: Proc. Lond. Math. Soc., 31 (1899), p.130.
- (2. 41) 文献(1.4)
- (2. 42) たとえば, 倉西: 応用弾性学, (昭40), p.200, 共立出版.
- (2. 43) Н.Х. Арутюнян и Б.Л. Абрамян: Кручение Упругих Тел, (1963), p.507, Государственное Издательство Физико-Математическои Литературы.

第3章

- (3. 1) L. Kelvin and P.G. Tait: Natural Philosophy, (1895), p.279, Cambridge Univ. Press; あるいは I. Todhunter and K. Pearson: A History

- of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, Vol. II, Part II, (1965), p.353, Dover を参照のこと.
- (3. 2) R.D. Mindlin: Physics, 7(1936), p.195.
- (3. 3) E. Melan: Z. AMM, 12-6(1932), p.343.
- (3. 4) A.E. Green: Proc. Cambridge Phil. Soc., 41 (1945), p.224.
- (3. 5) I.N. Sneddon: Proc. Glasgow Math. Assoc., 7(1965), p.48.
- (3. 6) I.N. Sneddon: Arch. Mech. Stosowanej, 18-3(1966), p.403.
- (3. 7) I.N. Sneddon and D.S. Berry: Handbuch der Physik (ed. by S. Flügge), Vol. VI, (1958), p.72, Springer-Verlag.
- (3. 8) W.R. Dean ほか2名: Proc. Cambridge Phil. Soc., 40(1944), p.5.
- (3. 9) H.D. Conway: J. Appl. Mech., 29(1962), p.318.
- (3. 10) 柴原・尾田: 機械学会論文集, 35-270(昭44), p.278.
- (3. 11) Th. Kermanidis: Acta Mech., 16-3/4(1973) p.175.
- (3. 12) Th. Kermanidis: Int. J. Solids Struct., 11-4 (1975), p.493.
- (3. 13) 古橋: 機械学会論文集, 38-315 (昭47), p. 2825.
- (3. 14) 西谷・村上: 機械学会論文集, 40-329(昭49), p.31.
- (3. 15) 西谷: 機械学会誌, 70-580(昭42), p.627.
- (3. 16) 岡村・島田: 土木学会論文報告集, No.199 (昭47), p.33.
- (3. 17) 長谷川: 機械学会講演論文集, No.760-12(昭51), p.83.
- (3. 18) 長谷川: 第27回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭52), p.241.
- (3. 19) 長谷川: 機械学会講演論文集, No. 785-1 (昭53), p.10
- (3. 20) 長谷川: 機械学会講演論文集, No.784-10(昭53), p.91.
- (3. 21) 長谷川: 機械学会講演論文集, No. 790-3 (昭54), p.40
- (3. 22) J.N. Goodier: Phil. Mag., 23-157(1937), p. 1017.
- (3. 23) 文献(2. 27)の p.19.
- (3. 24) 文献(1. 13)と(1. 14)
- (3. 25) H. Hasegawa: 広島電機大学研究報告, 9(昭51), p.83.
- (3. 26) 古橋: 機械学会論文集, 39-317(昭48), p.60.
- (3. 27) 寺沢: 自然科学者のための数学概論, 応用編, (昭43), p.41, 岩波.
- (3. 28) 文献(1. 15)と(1. 16).
- (3. 29) H. Hasegawa: 広島電機大学研究報告, 8(昭50), p.81.
- (3. 30) 文献(2. 21)の p.174.
- (3. 31) 長谷川: 機械学会論文集, 42-355(昭51), p. 716.
- (3. 32) H. Hasegawa: Bull. of JSME, 19-137(1976) p.1262.
- (3. 33) H. Hasegawa: 広島電機大学研究報告, 10(昭52), p.69.
- (3. 34) A. Erdélyi, ほか3名: Tables of Integral Transforms, Vol. 1, 2 (1954), McGraw-Hill.
- (3. 35) たとえば, I.N. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, (1956), p.360, McGraw-Hill.
- (3. 36) 長谷川: 機械学会論文集, 42-356(昭51), p. 1145.
- (3. 37) 西村: 振動工学, (昭44), p.379, 誠文堂新光社.
- (3. 38) 妹沢: 振動学, (昭46), p.155, 国際理工研究社.
- (3. 39) H. Kolsky: Stress Wave in Solids, (1963), p.46, Dover.
- (3. 40) C. Л. ソボレフ: 物理数学の方程式, I, (昭44), p.214, 共立出版.
- (3. 41) 文献(1. 13)と(1. 4).
- (3. 42) 長谷川: 機械学会論文集, A編, 45-394 (昭54), p.683.
- (3. 43) 長谷川: 機械学会講演論文集(日立地方), (昭52), p.1.
- (3. 44) 長谷川: 機械学会講演論文集, No. 795-1 (昭54), p.16.
- (3. 45) 長谷川: 機械学会講演論文集, No.780-12(昭53), p.15.
- (3. 46) 長谷川: 第28回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭53), p.187.
- (3. 47) H. Hasegawa: 広島電機大学研究報告, 11(昭53), p.63.
- (3. 48) たとえば, 村・森: マイクロメカニクス, (昭51), 培風館.

第4章

- (4. 1) 文献(3. 1).

- (4. 2) 文献(1.15)と(1.16)
 - (4. 3) 古橋：明治大学工学部研究報告, No.28(昭49), p.3.
 - (4. 4) 文献(2.25)
 - (4. 5) E. Sternberg and R.E. Eubanks: J. Rat. Mech. Anal., 4(1955), p.135.
 - (4. 6) M.J. Turteltaub and E. Sternberg: Arch. Rat. Mech. Anal., 29-3(1968), p.193.
 - (4. 7) 文献(1.9).
 - (4. 8) B.E. Boley: J. Math. Phys., 36-3(1957), p.261.
 - (4. 9) R.E. Llorens and E.J. McQuillen: J. Appl. Mech., 41-4(1974), p.1133.
 - (4.10) 玉手：機械学会誌, 64-513(昭36), p.1366.
 - (4.11) 文献(3.14)~(3.16)
 - (4.12) 文献(1.1)の p.185.
 - (4.13) 文献(3.7)の p.84.
 - (4.14) 文献(3.2).
 - (4.15) 文献(2.22)~(2.24).
 - (4.16) 文献(2.26).
 - (4.17) 文献(2.1).
 - (4.18) 長谷川：機械学会論文集, 44-378(昭53), p.505.
 - (4.19) H. Hasegawa: Bull. of JSME, 21-160(1978) p.1462.
 - (4.20) 文献(1.15)と(1.16)
 - (4.21) H. Hasegawa: Theoretical and Applied Mechanics (ed. by Japan Nat. Commit. Theor. Appl. Mech. Sci. Council of Japan), Vol. 26 (1978), p.157, Univ. of Tokyo Press.
- 第5章
- (5. 1) 福田・長谷川：明治大学工学部研究報告, No.29(昭49), p.73.
 - (5. 2) E. Sternberg and F. Rosenthal: J. Appl. Mech., 19(1952), p.413.
 - (5. 3) 笠野・ほか3名：機械学会論文集, 41-350(昭50), p.2847.
 - (5. 4) 文献(3.42)と(3.44).
 - (5. 5) 長谷川：機械学会講演論文集, No.770-1(昭52), p.86.
 - (5. 6) 長谷川：機械学会講演論文集, No.775-1(昭52), p.7.
 - (5. 7) 文献(4.18)と(4.19).
 - (5. 8) 文献(3.34).
- 第6章
- (6. 1) H.D. Conway, ほか2名：Int. J. Engng. Sci., 4(1966), p.343.
 - (6. 2) H.D. Conway and K.A. Farnham: Int. J. Engng. Sci., 5-2(1967), p.145.
 - (6. 3) H.D. Conway and K.A. Farnham: Int. J. Engng. Sci., 5-7(1967), p.541.
 - (6. 4) H.D. Conway: Int. J. Mech. Sci., 11(1969), p.709.
 - (6. 5) 宮本：塑性と加工, 12-124(昭46), p.360.
 - (6. 6) 尾田：機械学会論文集, 40-329(昭49), p.70.
 - (6. 7) 尾田：機械学会論文集, 39-322(昭48), p.1736.
 - (6. 8) 渋谷・中原：機械学会論文集, 39-326(昭48), p.2923.
 - (6. 9) 西谷：機械学会論文集, 26-167(昭35), p.983.
 - (6.10) 文献(3.14)~(3.16).
 - (6.11) 文献(3.11)と(3.12).
 - (6.12) 西谷・橋本：機械学会論文集, 43-374(昭52), p.3642.
 - (6.13) J.E. Luco: J. Appl. Mech., 43(1976), p.419.
 - (6.14) 文献(3.9).
 - (6.15) 長谷川：機械学会講演論文集, No.780-3(昭53), p.124.
 - (6.16) 文献(3.18).
 - (6.17) 文献(6.5)と(6.10).
 - (6.18) 村上：機械学会論文集, 43-370(昭52), p.2022.
 - (6.19) 文献(3.19).
 - (6.20) 長谷川：機械学会講演論文集 No.790-12(昭54), p.25.
 - (6.21) G. Eason, ほか2名：Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 247(1955), p.529.
 - (6.22) 文献(3.34).
 - (6.23) I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik: Tables of Integral, Series, and Products, (1965), Academic Press.
 - (6.24) F. Oberhettinger: Tables of Bessel Transforms, (1972), Springer-Verlag.
 - (6.25) G.N. Watson: Theory of Bessel Functions, (1966), Cambridge Univ. Press.
 - (6.26) 中沢：機械学会誌, 64-513(昭36), p.1504.
 - (6.27) 菊川・佐藤：機械学会論文集, 38-311(昭47), p.1673.
 - (6.28) 菊川・佐藤：機械学会論文集, 38-311(昭48), p.1681.
 - (6.29) 佐藤・ほか2名：機械学会論文集, 42-364(昭51), p.3701.

軸対称弾性問題の応力関数による解法に関する研究

- (6.30) 西原・藤井：機械学会論文集, 18-65(昭27), p.9.
- (6.31) 西田：応力集中, (昭42), p.615, 森北出版.
- (6.32) 文献(2.11)の p.159.
- (6.33) R.E. Peterson: Stress Concentration Design Factors, (1974), John Wiley and Sons.
- (6.34) M.M. Frocht: Photoelasticity, Vol. 2, (1948), p.457, John Wiley and Sons.
- (6.35) 半沢・ほか2名：機械学会論文集, A編, 45-392(昭54), p.299.
- (6.36) 浜田・ほか2名：機械学会論文集, 33-256(昭42), p.1916.
- (6.37) 浜田・ほか2名：機械学会論文集, 34-268(昭43), p.2130.
- (6.38) 石田：機械学会論文集, 19-83(昭28), p.5